Lösungsvorschlag zur LA-Klausur vom 27.03.2008

I.1 (4 Punkte)

Es sei M eine Menge mit zwei Verknüpfungen $*$ und $\circ$. Weiter gebe es ein Element $e \in M$, das sowohl für $*$ als auch für $\circ$ neutrales Element ist. Schließlich gelte für alle $m, n, p, q \in M$ die Gleichung

$$(m * n) \circ (p * q) = (m \circ p) * (n \circ q).$$

Zeigen Sie:

a) Die Verknüpfungen $*$ und $\circ$ stimmen überein, das heißt

$$\forall m, q \in M: \ m \circ q = m * q.$$

b) Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ und kommutativ.

c) $(M, *)$ muss keine Gruppe sein (Gegenbeispiel!).

Lösung: a) Die Gleichheit von $*$ und $\circ$ folgt, wenn man in der Gleichung aus der Aufgabenstellung $n = p = e$ setzt:

$$\forall m, q \in M : m \circ q = (m * e) \circ (e * q) = (m \circ e) * (e \circ q) = m * q.$$

Wir schreiben ab jetzt immer $*$ statt $\circ$.

b) Für die Assoziativität ist zu zeigen: $\forall m, n, q \in M : (m * n) * q = m * (n * q)$.

Das folgt jetzt wieder aus der Gleichung der Aufgabenstellung, indem man dort $p = e$ setzt:

$$(m * n) * q = (m * n) * (e * q) = (m * e) * (n * q) = m * (n * q).$$

Die Kommutativität bedeutet: $\forall n, p \in M : n * p = p * n$.

Dies folgt ebenfalls aus der Aufgabenstellung mit $m = q = e$ wie folgt:

$$n * p = (e * n) * (p * e) = (e * p) * (n * e) = p * n.$$

c) Dass $(M, *)$ noch keine Gruppe sein muss, sieht man an dem Beispiel

$$M = \mathbb{Z}, \text{ wobei } * = \circ = \cdot, \text{ die übliche Multiplikation in } \mathbb{Z} \text{ ist.}$$

Hier ist 1 das neutrale Element, die Verknüpfung ist assoziativ und kommutativ, und es gilt offensichtlich

$$\forall m, n, p, q \in \mathbb{Z} : (m \cdot n) \cdot (p \cdot q) = mnpq = mpnq = (m \cdot p) \cdot (n \cdot q).$$

Also erfüllt M die Bedingungen aus der Aufgabenstellung.

Es ist jedoch keine Gruppe, denn es gibt kein zu 0 inverses Element.

I.2 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist
$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$$
ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Sind speziell
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix},$$
so gilt für den Untervektorraum U aus Teil a)
$$U = \{0\} \iff \{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} = \emptyset.$$

Lösung:

a) Natürlich liegt die Nullmatrix in U, denn $A \cdot 0 = 0 \cdot B = 0$.

Für $X, Y \in U$ gilt aufgrund des Distributivgesetzes für die Matrizenmultiplikation

$$A(X + Y) = AX + AY = XB + YB = (X + Y)B,$$

also auch $X + Y \in U$.

Für $X \in U$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt
$$A(rX) = r(AX) = r(XB) = (rX)B,$$
und daher auch $rX \in U$.

Insgesamt folgt, dass U ein Untervektorraum des Vektorraums der reellen 2×2-Matrizen ist.

b) Wir schreiben $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Die Bedingung $AX = XB$ heißt dann explizit ausgeschrieben
$$\begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_3 & a_3x_2 + a_4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1b_1 & x_1b_2 + x_2b_4 \\ x_3b_1 & x_3b_2 + x_4b_4 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit ist äquivalent zur Gleichheit der entsprechenden Einträge. Das gibt („Koeffizientenvergleich“) ein homogenes lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen für die 4 Unbekannten $x_1, \ldots, x_4$. Es sieht so aus:

$$\begin{array}{rrrrl}
(a_1 - b_1)x_1 & & & & = 0 \\
-b_2x_1 & +(a_1 - b_4)x_2 & & & = 0 \\
a_3x_1 & & +(a_4 - b_1)x_3 & & = 0 \\
& a_3x_2 & -b_2x_3 & +(a_4 - b_4)x_4 & = 0
\end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems ist eine untere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge von der Form $(a_i - b_j)$ mit $i, j \in \{1, 4\}$ sind.

U ist genau dann der Nullraum, wenn die (quadratische!) Koeffizientenmatrix regulär ist, also genau dann, wenn ihre Diagonaleinträge alle nicht 0 sind, also genau dann, wenn für $i, j \in \{1, 4\}$ niemals $a_i = b_j$ gilt.

Das ist aber gerade die Behauptung.

I.3 (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x$$

gegeben.

Bestimmen Sie eine geordnete Basis B des $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis C des $\mathbb{R}^3$, so dass Φ bezüglich B und C die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Lösung:

Es seien $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B und C hat genau dann, die angegebene Form, wenn

$$\Phi(b_1) = c_1,\ \Phi(b_2) = c_2,\ \Phi(b_3) = \Phi(b_4) = 0.$$

Das ist gerade die Bedeutung der Abbildungsmatrix.

Um B und C zu finden, sollte man also eine Basis $\{b_3, b_4\}$ des Kerns von Φ bestimmen, diese zu einer Basis B von $\mathbb{R}^4$ ergänzen, dann $c_i = \Phi(b_i), i = 1, 2,$ setzen und $\{c_1, c_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

Das tun wir jetzt.

Die Gauß-Normalform der ursprünglichen Abbildungsmatrix ergibt sich schnell zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und daraus liest man ab, dass

$$b_3 := (-1, 4, -5, 0)^\top, \quad b_4 := (-3, 2, 0, -5)^\top$$

Erzeuger des Kerns von Φ sind. Diese werden durch $b_1 := e_1, b_2 := e_2$ (die ersten beiden Vektoren der Standardbasis) zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt.

NB: Das ist tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^4$, denn die Determinante der Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_4$ ist 25, also nicht 0.

Nun setzt man

$$c_1 := \Phi(b_1) = (2, -1, 4)^\top, \quad c_2 := \Phi(b_2) = (3, 1, 1)^\top,$$

und ergänzt diese beiden Vektoren durch $c_3 := (0, 0, 1)^\top$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Dies ist tatsächlich eine gute Wahl, denn die Determinante der Matrix mit den Spalten c_1, c_2, c_3 ist 5, also nicht 0.

Damit sind Basen mit der gewünschten Eigenschaft konstruiert.

I.4 (4 Punkte)

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in V \mid x_1 + x_2 = x_3\right\}$.

a) Zeigen Sie: U ist ein Untervektorraum von V und es gibt einen Isomorphismus $\Phi : V/U \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie: Für alle $\Psi \in (V/U)^*$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\Psi = a \cdot \Phi$.

c) Finden Sie $x, y \in V$ mit $\frac{\Phi([x])}{\Phi([y])} = 42$.

Hinweis: In b) und c) ist Φ Ihr Isomorphismus aus a). Für $v \in V$ bezeichnen wir mit $[v]$ die Klasse von v im Faktorraum V/U. Weiter ist $(V/U)^*$ der Dualraum von V/U.

Lösung:

a) Es ist $U = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in V \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$ der Kern der linearen Abbildung

$$\Lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \Lambda((x_1, x_2, x_3)^\top) = x_1 + x_2 - x_3.$$

Deshalb ist U ein Untervektorraum.

Für $r \in \mathbb{R}$ gilt $r = \Lambda((r, 0, 0)^\top)$, also ist Λ surjektiv und hat damit Rang 1. Wegen der Dimensionsformel für Homomorphismen ist

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Kern}(\Lambda)) = \dim(V) - \mathrm{Rang}(\Lambda) = 3 - 1 = 2.$$

Daher hat V/U Dimension $\dim(V) - \dim(U) = 1$, und ist demnach als reeller Vektorraum zu $\mathbb{R}$ isomorph. Folglich gibt es einen Isomorphismus Φ wie behauptet.

Konkreter könnte man auch so argumentieren: Da Λ surjektiv ist und Kern U hat, ist die durch den Homomorphiesatz zugesicherte Abbildung

$$\Phi := \widetilde{\Lambda} : V/U \to \mathbb{R}, [v] \mapsto \Lambda(v),$$

ein Isomorphismus.

b) Es ist V/U eindimensional, und daher ist auch der Dualraum $(V/U)^*$ eindimensional. Da Φ aus Teil a) nicht 0 ist, ist $\{\Phi\}$ eine Basis von $(V/U)^*$, und damit auch ein Erzeugendensystem: jede Linearform ist ein Vielfaches von Φ.

Wer das nicht mag, kann auch sagen: Wenn $[x] \in V/U$ nicht 0 ist, ist auch $\Phi([x]) \neq 0$, denn Φ ist ein Isomorphismus. Daher gilt

$$\Psi([x]) = \frac{\Psi([x])}{\Phi([x])}\Phi([x]).$$

Die Klasse $[x]$ erzeugt den eindimensionalen Vektorraum V/U, und nach dem Satz über die lineare Fortsetzung ist Ψ durch seinen Wert auf $[x]$ festgelegt. Es gilt $\Psi = \frac{\Psi([x])}{\Phi([x])} \cdot \Phi$.

c) Hier wähle man ein $y \in V \setminus U$, zum Beispiel $y = (1, 0, 0)^\top$. Es ist dann $[y] \neq 0$. Weiter setze man $x = 42y$, also insbesondere $[x] = [42y] = 42[y]$.

Wegen der Injektivität von Φ gilt sicher $\Phi([y]) \neq 0$, und aus der Linearität von Φ folgt

$$\frac{\Phi([x])}{\Phi([y])} = \frac{\Phi([42 \cdot y])}{\Phi(y)} = \frac{42 \cdot \Phi([y])}{\Phi([y])} = 42.$$

I.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft $\Phi^2 = \mathrm{Id}_V$.

Zeigen Sie:

a) Jeder Eigenwert von Φ ist entweder 1 oder -1.

b) Φ ist diagonalisierbar.

c) $\dim(\mathrm{Eig}(\Phi,1)) = \frac{1}{2}\big(\dim(V) + \mathrm{Spur}(\Phi)\big)$, wobei $\mathrm{Eig}(\Phi,1) = \mathrm{Kern}(\Phi - \mathrm{Id}_V)$.

Lösung:

a) Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von Φ und v ein zugehöriger Eigenvektor.

Dann folgt

$$\lambda^2 \cdot v = \lambda \cdot \Phi(v) = \Phi(\lambda \cdot v) = \Phi^2(v) = v,$$

da $\Phi^2 = \mathrm{Id}_V$. Daraus folgt $\lambda^2 = 1$, denn der Eigenvektor v ist ja nicht 0.

Das impliziert $\lambda = \pm 1$.

b) Es gilt

$$\mathrm{Id}_V = \frac{1}{2}(\Phi + \mathrm{Id}_V) - \frac{1}{2}(\Phi - \mathrm{Id}_V).$$

Für $v \in V$ sei $v_- := \frac{1}{2}(\Phi - \mathrm{Id}_V)(v)$ und $v_+ := \frac{1}{2}(\Phi + \mathrm{Id}_V)(v)$.

Dann ist $v = v_- + v_+$.

Aus der Gleichung $\Phi^2 = \mathrm{Id}_V$ folgt aber

$$\Phi(v_\pm) = \Phi(\frac{1}{2}(\Phi \pm \mathrm{Id}_V)(v)) = \frac{1}{2}(\Phi^2(v) \pm \Phi(v)) = \pm v_\pm,$$

also ist v_+ im Eigenraum zum Eigenwert 1 und v_- im Eigenraum zum Eigenwert -1.

Daher ist V die Summe dieser Eigenräume, und mithin ist Φ diagonalisierbar.

c) Da Φ diagonalisierbar ist, gibt es eine Abbildungsmatrix in Diagonalform. Die Spur von Φ ist die Spur dieser Abbildungsmatrix

Auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte 1 und -1 jeweils mit algebraischer = geometrischer Multiplizität. Diese Multiplizitäten sind gerade die Dimensionen der Eigenräume.

Die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist $\dim(V)$.

Es folgt – da wir die potenziellen Eigenwerte kennen –

$$\mathrm{Spur}(\Phi) = \dim(\mathrm{Eig}(\Phi,1)) - \dim(\mathrm{Eig}(\Phi,-1)) = 2\dim(\mathrm{Eig}(\Phi,1)) - \dim V,$$

und dies wird zur gewünschten Formel

$$\dim(\mathrm{Eig}(\Phi,1)) = \frac{1}{2}(\dim(V) + \mathrm{Spur}(\Phi))$$

aufgelöst.

I.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie für alle $n \geq 1$ die Determinante der $n \times n$-Matrix $A_n = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{für } i \in \{1,n\} \text{ oder } j \in \{1,n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung: Wir fangen an mit kleinen Werten für n und schreiben zuerst die Matrizen A_1 bis A_4 hin:

$$A_1 = (2),\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt die folgenden Determinanten:

$$\det(A_1) = 2, \det(A_2) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1, \det(A_3) = 0 + 60 + 60 - 0 - 50 - 54 = 16$$

und – durch zweimaliges Entwickeln nach der zweiten Zeile –

$$\begin{aligned} \det(A_4) &= -3 \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}) + 6 \cdot \det(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}) \\ &= 21 \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}) - 24 \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}) \\ &= (21 - 24) \cdot (21 - 24) = 9. \end{aligned}$$

Die Bildungsvorschrift für A_n sagt insbesondere, dass nur Einträge in der ersten oder letzten Zeile beziehungsweise ersten oder letzten Spalte nicht 0 sein können.

Insbesondere sind für $n \geq 5$ die zweite, dritte und vierte Zeile linear abhängig, denn nur ihr erster und letzter Eintrag ist nicht 0. Konkreter sind diese Zeilen

$$(3\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ n+2),\ (4\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ n+3),\ (5\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ n+4),$$

und man sieht, dass die dritte Zeile die Hälfte der Summe von zweiter und vierter Zeile ist.

Also ist für $n \geq 5$ die gesuchte Determinante $\det(A_n) = 0$.

II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von A.

b) Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $B^2 = A$?

Lösung: a) Wir berechnen zunächst das Charakteristische Polynom von A.

$$\begin{aligned}
\mathrm{CP}(A,X) &= \det(\begin{pmatrix} -1-X & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -X & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -X & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1-X \end{pmatrix}) \\
&= (1+X)\cdot\det(\begin{pmatrix} -1-X & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -X & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1-X \end{pmatrix}) \\
&= (1+X)(1-X)\cdot\det(\begin{pmatrix} -1-X & -2 & 2 \\ 2 & -X & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}) \\
&= (1+X)(1-X)\cdot\det(\begin{pmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 2 & -X+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}) \\
&= (X+1)^2(X-1)^2.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde zuerst die zweite von der dritten Zeile abgezogen, aus dieser dann der Faktor $(1+X)$ ausgeklammert. Für die zweite Umformung wird zweimal die dritte Zeile zur vierten addiert, aus dieser der Faktor $(1-X)$ ausgeklammert, und dann die Kästchenregel benutzt. In der verbleibenden 3×3-Matrix wurden Vielfache der dritten von den beiden oberen Zeilen abgezogen und dann die Determinante der verbleibenden Dreiecksmatrix durch Multiplikation der Diagonaleinträge bestimmt.

Damit wissen wir, dass die Eigenwerte von A die Zahlen 1 und -1 jeweils mit algebraischer Vielfachheit 2 sind. Es gilt nun, die geometrischen Vielfachheiten zu ermitteln. Diese sind die Dimensionen der Eigenräume.

$$\mathrm{Rang}(A - I_4) = \mathrm{Rang}(\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}) = \mathrm{Rang}(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}) = 3.$$

$$\mathrm{Rang}(A + I_4) = \mathrm{Rang}(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}) = 2,$$

da die erste und letzte sowie zweite und dritte Zeile gleich sind. Es folgt wegen $\dim(\mathrm{Eig}(A,c) = 4 - \mathrm{Rang}(A - cI_4)$, dass die geometrischen Vielfachheiten von 1 bzw. -1 gleich 1 bzw. 2 sind.

Daher gibt es zu 1 ein Jordankästchen, und zu -1 zwei. Die Dimensionen der Haupträume sind jeweils 2, und es folgt, dass die Jordan'sche Normalform J von A die folgende ist:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Offensichtlich gibt es eine Matrix $W \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, deren Quadrat gerade J ist, zum Beispiel

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Da es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ gibt, für die $A = SJS^{-1}$ gilt, folgt

$$A = SJS^{-1} = SW^2S^{-1} = SWS^{-1}SWS^{-1} = B^2,$$

wenn man

$$B := SWS^{-1}$$

setzt.

II.2 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$.

Weiter sei $\Pi : V \to V$ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft $\Pi^2 = \Pi$.

Schließlich seien $U = \mathrm{Bild}(\Pi)$ und $U^\perp$ der orthogonale Komplementärraum dazu.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen.

i) $\mathrm{Kern}(\Pi) = U^\perp$.

ii) Für alle $v \in V$ gilt die Ungleichung $\|v\| \geq \|\Pi(v)\|$.

Lösung: Es gibt zwei Richtungen zu zeigen.

$\underline{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$: Es sei $\mathrm{Kern}(\Pi) = U^\perp$. Für jedes $v \in V$ gibt es $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$, sodass $v = u + u^\perp$.

Wegen $\Pi^2 = \Pi$ ist Π auf $\mathrm{Bild}\,(\Pi) = U$ die Identität, und es gilt

$$\Pi(v) = \Pi(u + u^\perp) = \Pi(u) = u.$$

Es folgt mit Pythagoras

$$\|v\| = \sqrt{\|v\|^2} = \sqrt{\|u\|^2 + \|u^\perp\|^2} \geq \sqrt{\|u\|^2} = \|u\| = \|\Pi(v)\|.$$

$\underline{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$: Nun gelte für alle $v \in V$ die Ungleichung $\|v\| \geq \|\Pi(v)\|$.

Der Kern von Π hat nach der Dimensionsformel für Vektorraumhomomorphismen die Dimension

$$\dim(\mathrm{Kern}(\Pi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(\Pi)) = \dim(V) - \dim(U),$$

was nach der Dimensionsformel für Untervektorräume dasselbe ist wie die des orthogonalen Komplementärraums $U^\perp$ zu U.

$$\dim(\mathrm{Kern}(\Pi)) = \dim(U^\perp).$$

Wir zeigen nun, dass der Kern von Π in $U^\perp$ enthalten ist. Da diese Vektorräume dieselbe endliche Dimension haben, müssen sie dann übereinstimmen.

Sei also $w \in \mathrm{Kern}(\Pi)$ und $u \in U$. Zu zeigen ist die Gleichung

$$\langle u, w\rangle = 0.$$

Diese ist für $w = 0$ erfüllt, wir setzen also jetzt $w \neq 0$ voraus.

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Da der Kern von Π ein Untervektorraum ist, ist auch $xw \in \mathrm{Kern}(\Pi)$.

Es gilt nach Voraussetzung wegen $\Pi(u + xw) = u$:

$$\|u + xw\| \geq \|u\|$$

Quadriert und durch Skalarprodukte ausgedrückt heißt das

$$\langle u, u\rangle \leq \langle u + xw, u + xw\rangle = \langle u, u\rangle + 2x\langle u, w\rangle + x^2\langle w, w\rangle.$$

Kürzen der übereinstimmenden Summanden links und rechts ergibt

$$0 \leq 2x\langle u, w\rangle + x^2\langle w, w\rangle.$$

Da dies für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss, muss der lineare Term 0 sein, also – wie gewünscht – $\langle u, w\rangle = 0$.

II.3 (4 Punkte)

Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und Φ bzw. Ψ die Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$, die durch $\Phi(x) = A \cdot x$ bzw. $\Psi(x) = B \cdot x$ definiert sind.

a) Zeigen Sie: Φ und Ψ sind bezüglich des Standardskalarprodukts nicht zueinander adjungiert.

b) Geben Sie ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ an, für welches Φ und Ψ zueinander adjungiert sind.

Lösung:

a) Wären Φ und Ψ bezüglich des Standardskalarprodukts zueinander adjungiert, so müsste für alle $v, w \in V = \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$\Phi(v)^\top \cdot w = v^\top \cdot \Psi(w)$$

gelten.

Für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt aber

$$\Phi(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \Psi(w) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es folgt

$$\Phi(v)^\top \cdot w = 4 \neq 3 = v^\top \cdot \Psi(w).$$

Also sind Φ und Ψ nicht zueinander adjungiert.

b) Jedes Skalarprodukt auf V ist von der Form

$$\langle v, w \rangle = v^\top \cdot F \cdot w, \quad F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, 0 < a, \ 0 < ac - b^2.$$

Damit Φ und Ψ bezüglich des durch F definierten Skalarprodukts adjungiert sind, langt es, wenn

$$A^\top F = FB$$

gilt, denn das impliziert für alle $v, w \in V$

$$\langle \Phi(v), w \rangle = v^\top A^\top F w = v^\top F B w = \langle v, \Psi(w) \rangle.$$

Ausgeschrieben bedeutet das für die Einträge von F:

$$A^\top F = \begin{pmatrix} a + 2b & b + 2c \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + b \\ b & b + c \end{pmatrix} = FB.$$

Dies impliziert sofort $b = 0$ und $a = 2c$, und umgekehrt liefert die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt, bezüglich dessen die Endomorphismen Φ und Ψ zueinander adjungiert sind.

II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^4$ sei eine Isometrie Φ gegeben durch

$$\Phi(\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} z \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie für Φ eine Abbildungsmatrix in euklidischer Normalform an.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, bezüglich der Φ die Normalform aus a) als Abbildungsmatrix hat.

c) Berechnen Sie für die zu Φ adjungierte Abbildung Φ^* den Vektor

$$\Phi^*(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}).$$

Lösung: a) Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\mathrm{CP}(\Phi, X) = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1),$$

also sind 1 und -1 jeweils einfache Eigenwerte, und es gibt ein Drehkästchen zum Winkel $\pi/2$. Die euklidische Normalform lautet

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Der Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1 wird von $(1,1,1,1)^\top$ erzeugt, der zum Eigenwert -1 von $(1,-1,1,-1)^\top$. Dazu orthogonal steht der Vektor $(1,1,-1,-1)^\top$, und sein Bild unter Φ ist $(-1,1,1,-1)^\top$. Durch Normierung entsteht aus diesen Vektoren die Orthonormalbasis

$$\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

und sie ist so konstruiert, dass Φ bezüglich ihr durch $\widetilde{A}$ beschrieben wird.

c) Da Φ eine Isometrie ist, ist $\Phi^* = \Phi^{-1}$, und es folgt

$$\Phi^*(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V. Mit dem dazu adjungierten Endomorphismus Φ^* setzen wir dann

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*) \quad \text{und} \quad \Psi_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Phi^*).$$

Zeigen Sie:

a) Ψ_1 und Ψ_2 sind selbstadjungiert.

b) Φ ist genau dann normal, wenn die Gleichung $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1$ gilt.

Lösung:

a) Wegen $(\Phi^*)^* = \Phi$ und der reellen Linearität des Adjungierens sind die zu Ψ_1 bzw. Ψ_2 adjungierten Endomorphismen gegeben durch

$$\Psi_1^* = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)^* = \frac{1}{2}(\Phi^* + \Phi) = \Psi_1$$

bzw.

$$\Psi_2^* = (\frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Phi^*))^* = -\frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi^* - \Phi) = \Psi_2.$$

Daher sind beide Endomorphismen selbstadjungiert.

b) Dass Φ normal ist bedeutet laut Definition das Erfülltsein der Gleichung

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi.$$

Andererseits gilt immer – egal ob Φ selbstadjungiert ist oder nicht –

$$\begin{aligned} \Psi_1 \circ \Psi_2 &= \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi^*) \circ \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Phi^*) \\ &= \tfrac{1}{4\mathrm{i}} \cdot (\Phi^2 + \Phi^* \circ \Phi - \Phi \circ \Phi^* - (\Phi^*)^2) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \Psi_2 \circ \Psi_1 &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Phi^*) \circ \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi^*) \\ &= \tfrac{1}{4\mathrm{i}} \cdot (\Phi^2 - \Phi^* \circ \Phi + \Phi \circ \Phi^* - (\Phi^*)^2) \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist

$$\Psi_2 \circ \Psi_1 - \Psi_1 \circ \Psi_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi \circ \Phi^* - \Phi^* \circ \Phi).$$

Es gilt $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1$ genau dann, wenn die Differenz 0 ist, also genau dann, wenn $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$, also genau dann, wenn Φ normal ist.

II.6 (4 Punkte)

Es bezeichne d die Abstandsfunktion im euklidische Standardraum $\mathbb{R}^3$.

Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zwei Punkte und

$$G = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Gerade in $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$E = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid d(X, A) = d(X, B)\}$$

eine affine Ebene ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$Q = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid d(X, G) = d(X, A)\}$$

eine Quadrik in $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie ihre Normalform.

Lösung:

a) Der Abstand von $X = (x\ y\ z)^\top$ zu A ist

$$d(X, A) = |X - A| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

Analog ist

$$d(X, B) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}.$$

Diese Abstände sind nicht negativ. Sie sind also genau dann gleich, wenn ihre Quadrate übereinstimmen. Es gilt demnach $d(X, A) = d(X, B)$ genau dann, wenn auch

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9$$

gilt. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit

$$2x + 2y + 6z = 13.$$

Diese affin lineare Gleichung legt bekanntlich eine affine Hyperebene fest.

b) Der Abstand von X zu G ist

$$d(X, G) = \min\{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + (z-t)^2} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Wegen der Monotonie der Quadratwurzel wird der fragliche Ausdruck genau dort minimal, wo $(x-t)^2 + y^2 + (z-t)^2 = 2t^2 - 2(x+z)t + x^2 + y^2 + z^2$ in der Variablen t minimal wird. Das Minimum existiert, es handelt sich ja um den Abstand eines Punktes zu einer Geraden...

Durch Ableiten stellt man fest, dass das Minimum bei $t = \frac{x+z}{2}$ angenommen wird.
Daher gilt $d(X, A) = d(X, G)$ genau dann, wenn (siehe a))

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \left(\frac{x-z}{2}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2,$$

was nach Ausquadrieren der Ausdrücke einfach

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{xz}{2} + \frac{z^2}{4} + y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{xz}{2} + \frac{z^2}{4}$$

bedeutet.
Zusammenfassen der passenden Terme und Kürzen macht daraus die Bedingung

$$X \in Q \iff \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} + xz - 2y + 1 = 0.$$

Offensichtlich legt diese Bedingung eine Quadrik fest, Q ist also eine Quadrik.
Setzt man hier $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+z)$, $v = -2y+1, w = x$ (affiner Basiswechsel), so wird daraus die Gleichung

$$u^2 + v = 0.$$

Dies ist die Normalform der Quadrik.