Aufgaben und Lösungen zur Klausur Lineare Algebra im Frühjahr 2009

I.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass G zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist. Ist diese kommutativ?

(b) Bestimmen Sie alle $Z \in G$ mit der Eigenschaft

$$Z \cdot M = M \cdot Z \qquad \text{für alle } M \in G.$$

Lösung zu Aufgabe I.1

Vorbemerkung 1: Für a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & c_2 + a_1 b_2 + c_1 \\ 0 & 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) G ist Teilmenge von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \cdot)$ ist eine Gruppe, wie aus der Vorlesung bekannt ist. Also kann das Untergruppenkriterium angewandt werden. Es gilt:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow G \neq \emptyset.$

ii) Nach Vorbemerkung 1 gilt mit $A_1, A_2 \in G$ auch $A_1 \cdot A_2 \in G$.

iii) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Dann folgt aus der Vorbemerkung 1 leicht:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -c + ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $A^{-1} \in G$.

Nach dem Untergruppenkriterium ergeben i), ii), iii) gerade, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.
G ist nicht kommutativ. Es gilt zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner folgt die Nichtkommutativität aus b).

(b) **Vorbemerkung 2:**

Aus Vorbemerkung 1 folgt für $Z := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M := \begin{pmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$:

$$Z \cdot M = M \cdot Z \;\Leftrightarrow\; c_2 + a_1 b_2 + c_1 = c_1 + a_2 b_1 + c_2 \;\Leftrightarrow\; a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

Behauptung: Sei $Z(G) := \{Z \in G \mid \forall M \in G : Z \cdot M = M \cdot Z\}$. Dann ist

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis:

„$\supseteq$" : folgt direkt aus Vorbemerkung 2. Ist nämlich $a_1 = b_1 = 0$, so folgt $a_1 b_2 = a_2 b_1$ für alle a_2, $b_2 \in \mathbb{R}$.

„$\subseteq$" : Angenommen für $Z \in Z(G)$ gilt $a_1 \neq 0$. Wähle M mit $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$ und c_2 beliebig. Dann ist $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ und damit $Z \cdot M \neq M \cdot Z$. Widerspruch!
Für den Fall $b_1 \neq 0$ kann analog M gewählt werden mit $a_2 \neq 0$, $b_2 = 0$ und c_2 beliebig.

I.2 (4 Punkte)

Es seien V ein reeller Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $x_1, \dots, x_n \in V$ paarweise verschiedene Vektoren.

(a) Beweisen Sie, dass die Mengen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{x_i + x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ denselben Untervektorraum von V erzeugen.

(b) Erzeugen die Mengen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{x_i - x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ denselben Untervektorraum von V? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Lösung zu Aufgabe I.2

(a) Wir setzen $A := \{x_1, \dots, x_n\}$ und $B := \{x_i + x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Trivialerweise ist $[B] \subseteq [A]$, denn für $1 \leq i < j \leq n$ ist $x_i + x_j \in [A]$.

Umgekehrt sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Wegen $n \geq 3$ gibt es $j, k \in \{1, \dots, n-1\}$, so dass i, j, k paarweise verschieden sind. Es folgt

$$x_i = \frac{1}{2}(x_i + x_j) - \frac{1}{2}(x_j + x_k) + \frac{1}{2}(x_i + x_k) \in [B].$$

Damit ist auch $[A] \subseteq [B]$. Insgesamt folgt $[A] = [B]$.

(b) Die von den angegebenen Mengen erzeugten Unterräume sind im Allgemeinen nicht gleich, denn setzen wir $V := \mathbb{R}^2$ und

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$[x_1,\, x_2,\, x_3] = \mathbb{R}^2$$

aber

$$[x_1 - x_2,\, x_1 - x_3,\, x_2 - x_3] = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] \neq \mathbb{R}^2.$$

Alternativ kann man z.B. wählen:

$$x_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I.3 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Ferner seien zwei Abbildungen $\Phi_1 : U_1 \to U_1$ und $\Phi_2 : U_2 \to U_2$ gegeben.
Die Abbildung $\Phi : V \to V$ sei definiert durch

$$\Phi(u_1 + u_2) := \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2), \qquad u_1 \in U_1, u_2 \in U_2.$$

(a) Zeigen Sie: Φ ist genau dann linear, wenn Φ_1 und Φ_2 linear sind.

(b) Seien nun Φ_1 und Φ_2 linear. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\Phi_1) \oplus \mathrm{Kern}(\Phi_2).$$

Lösung zu Aufgabe I.3

(a) „$\Leftarrow$“: Seien Φ_1, Φ_2 linear.
Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$ mit $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda u + \mu v) &= \Phi(\lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2)) \\
&= \Phi(\lambda u_1 + \mu v_1 + \lambda u_2 + \mu v_2) \\
&= \Phi_1(\lambda u_1 + \mu v_1) + \Phi_2(\lambda u_2 + \mu v_2) \\
&\overset{(*)}{=} \lambda \Phi_1(u_1) + \mu \Phi_1(v_1) + \lambda \Phi_2(u_2) + \mu \Phi_2(v_2) \\
&= \lambda(\Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)) + \mu(\Phi_1(v_1) + \Phi_2(v_2)) \\
&= \lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v).
\end{aligned}$$

(*) Hier geht die Linearität von Φ_1 und Φ_2 ein.

„$\Rightarrow$“: Sei Φ linear.

(1) Es gilt: $\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 0$ wegen $0 = \Phi(0) = \Phi_1(0) + \Phi_2(0)$. Nun ist aber $\Phi_1(0) \in U_1$, $\Phi_2(0) \in U_2$, wegen der Direktheit der Summe folgt somit $\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 0$.

(2) Für $u \in U_1$ gilt:

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) + \Phi_2(0) \overset{(1)}{=} \Phi_1(u).$$

Es folgt $\Phi|_{U_1} = \Phi_1$. Als Einschränkung einer linearen Abbildung ist Φ_1 linear. Analog erhält man $\Phi|_{U_2} = \Phi_2$.

(b) Schreibe kurz $K := \mathrm{Kern}(\Phi)$, $K_1 := \mathrm{Kern}(\Phi_1)$ und $K_2 := \mathrm{Kern}(\Phi_2)$. Wir zeigen $K = K_1 + K_2$.

(1) $K \subseteq K_1 + K_2$:
Sei $u \in K, u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Dann gilt $0 = \Phi(u) = \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2)$. Wegen $\Phi_i(u_i) \in U_i$ gilt aufgrund der Direktheit der Summe schon $\Phi_1(u_1) = 0 = \Phi_2(u_2)$, also $u_i \in K_i$ für $i = 1, 2$, und damit $u = u_1 + u_2 \in K_1 + K_2$.

(2) $K_1 + K_2 \subseteq K$:
Sei $u \in K_1 + K_2$. Dann gibt es $u_1 \in K_1 \subseteq U_1$, $u_2 \in K_2 \subseteq U_2$ mit $u = u_1 + u_2$. Also gilt

$$\Phi(u) = \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2) = 0 + 0 = 0,$$

d.h. insbesondere $u \in K$.

(3) Wegen $K_1 \subseteq U_1$, $K_2 \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ folgt $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, d.h. die Summe aus K_1 und K_2 ist direkt.

I.4 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $f_1, \dots, f_n$ Linearformen auf V. Die lineare Abbildung $\Phi : V \to \mathbb{K}^n$ sei definiert durch $\Phi(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$ für $x \in V$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(i) $f_1, \dots, f_n$ sind linear abhängig.

(ii) $\mathrm{Bild}(\Phi) \neq \mathbb{K}^n$.

(iii) Es gibt eine Linearform $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $g \neq 0$ und $g \circ \Phi = 0$.
(0 steht jeweils für die Nullabbildung.)

Lösung zu Aufgabe I.4

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es seien $f_1, \dots, f_n$ linear abhängig.
Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_{i_0} \neq 0$ für ein $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ und

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0.$$

Der Vektor $e_{i_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (nur die i_0-te Komponente ist von Null verschieden) ist nicht im Bild von Φ enthalten. Wäre dies nämlich der Fall, so gäbe es ein $v \in V$ mit $(f_1(v), \dots, f_n(v)) = e_{i_0}$, d.h.

$$0 = \lambda_1 f_1(v) + \ldots + \lambda_n f_n(v) = \lambda_{i_0} f_{i_0}(v) = \lambda_{i_0} \neq 0,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist. In jedem Fall finden wir also ein Element in $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Bild}(\Phi)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es sei nun $\mathrm{Bild}(\Phi) \neq \mathbb{K}^n$.
Wir wählen eine Basis $y_1, \dots, y_k$ von $\mathrm{Bild}(\Phi)$ und ergänzen diese durch geeignete Vektoren $y_{k+1}, \dots, y_n \notin \mathrm{Bild}(\Phi)$ zu einer (geordneten) Basis $y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ von $\mathbb{K}^n$, die wir mit B bezeichnen. Nach Voraussetzung ist $k < n$. Die zu B duale Basis des Dualraums $(\mathbb{K}^n)^*$ bezeichnen wir mit $y_1^*, \dots, y_n^*$. Nach Definition der dualen Basis gilt

$$(\dagger) \qquad y_n^*(y_i) = 0 \quad \text{für } i < n, \quad y_n^*(y_n) = 1.$$

Setze nun

$$g := y_n^*.$$

Wegen ($\dagger$) gilt $g \neq 0$. Ferner ist $g \circ \Phi = 0$. Sei hierzu $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(v) = \sum_{i=1}^k \mu_i y_i$.
Hieraus folgt

$$(g \circ \Phi)(v) = g(\Phi(v)) = g(\sum_{i=1}^k \mu_i y_i) = \sum_{i=1}^k \mu_i g(y_i) = \sum_{i=1}^k \mu_i \underbrace{y_n^*(y_i)}_{=0} = 0.$$

Da $v \in V$ beliebig war, zeigt dies $g \circ \Phi = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es existiere eine Linearform $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $g \neq 0$ und $g \circ \Phi = 0$.
Es gibt $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ mit

$$g(\ (\xi_1, \dots, \xi_n)\ ) = a_1 \xi_1 + \ldots + a_n \xi_n$$

für alle $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$. Dabei sind nicht alle a_i gleich 0, da $g \neq 0$. Nach Voraussetzung gilt somit

$$0 = g(\Phi(v)) = g(\ (f_1(v), \dots, f_n(v))\ ) = a_1 f_1(v) + \ldots + a_n f_n(v),$$

für alle $v \in V$, also

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0.$$

Da nicht alle $a_1, \dots, a_n$ gleich 0 sind, sind $f_1, \dots, f_n$ linear abhängig.

I.5 (4 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff *Eigenvektor eines Endomorphismus*.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei Φ_a der Endomorphismus mit Abbildungsmatrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 2-a & 2-3a & -a \\ a & 3a & a \\ 0 & 1-a & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

bezüglich der Standardbasis.

Bestimmen Sie die Menge aller $a \in \mathbb{R}$, für die Φ_a diagonalisierbar ist.

Berechnen Sie für Φ_0 eine Basis aus Eigenvektoren.

Lösung zu Aufgabe 1.5

(a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Ein Vektor $x \in V \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor des Endomorphismus Φ, falls ein $\lambda \in K$ existiert mit $\Phi(x) = \lambda x$.

(b) Wir bestimmen die Eigenwerte von A_a in Abhängigkeit von a:

$$\det\begin{pmatrix} 2-a-\lambda & 2-3a & -a \\ a & 3a-\lambda & a \\ 0 & 1-a & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{+}{\longleftarrow} = \det\begin{array}{cc} -1 & + \end{array}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ a & 3a-\lambda & a \\ 0 & 1-a & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ a & 2a-\lambda & a \\ 0 & 1-a & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det(A_a - \lambda I) = (2-\lambda)[(2a-\lambda)(2-\lambda) - (1-a)a] = (2-\lambda)[\lambda^2 - \lambda(2+2a) + 3a + a^2].$$

Als Eigenwerte erhält man somit

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 1 + a \pm \sqrt{1-a}.$$

Wann treten mehrfache Eigenwerte auf?

$$1 + a \pm \sqrt{1-a} = 2 \Leftrightarrow 1 - a = (1-a)^2 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } a = 1$$

$$1 + a + \sqrt{1-a} = 1 + a - \sqrt{1-a} \Leftrightarrow a = 1$$

Wir müssen daher folgende Fälle unterscheiden:

(1) $a \geq 1$: Einziger reeller Eigenwert ist 2. Da A_a für $a \geq 1$ keine Diagonalmatrix ist, ist somit A_a nicht diagonalisierbar.

(2) $a = 0$: Das charakteristische Polynom ist $X(X-2)^2$. Es gilt

$$\mathrm{Rang}(A_0 - 2I_3) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Die Summe der Dimensionen der beiden Eigenräume ist 3, also ist A_0 diagonalisierbar.

(3) $0 \neq a < 1$: Das charakteristische Polynom zerfällt in drei verschiedene Linearfaktoren über $\mathbb{R}$, also ist A_a diagonalisierbar.

Wir berechnen noch eine Basis aus Eigenvektoren für Φ_0. Man sieht sofort

$$\mathrm{Kern}(A_0) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

sowie

$$\mathrm{Kern}(A_0 - 2I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden somit eine Basis aus Eigenvektoren von A_0.

I.6 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $D_n := (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$d_{ij} := \begin{cases} 1+a^2, & i=j, \\ a, & |i-j|=1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $1 \le i,j \le n$.
Berechnen Sie $\det D_n$.
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

Lösung zu Aufgabe 1.6:

$$\begin{aligned}
\det D_1 &= 1+a^2 \\
\det D_2 &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^2 - a^2 = 1+a^2+a^4 \\
\det D_3 &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^3 - a^2(1+a^2) - a^2(1+a^2) = 1+a^2+a^4+a^6
\end{aligned}$$

Behauptung: $\det D_n = 1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n} = \sum_{i=0}^{n} a^{2i}$
Beweis: Vollständige Induktion
Induktionsanfang: $n=1,2$ siehe oben.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\det D_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i}$ und $\det D_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} a^{2i}$ für ein $n \ge 3$.
Induktionsschluss: Durch Entwickeln nach der ersten Zeile findet man

$$\begin{aligned}
\det D_n &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+a^2)\det D_{n-1} - a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+a^2)\det D_{n-1} - a^2 \det D_{n-2} = (1+a^2)\sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} - a^2 \sum_{i=0}^{n-2} a^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} + a^2 \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} - a^2 \sum_{i=0}^{n-2} a^{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} + a^{2n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} a^{2i} = 1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}\ .
\end{aligned}$$

II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei für $a \in \mathbb{C}$ die komplexe Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A_a in Abhängigkeit von a.

(b) Geben Sie jeweils eine Matrix S_a an, sodass $S_a^{-1} A_a S_a$ die Jordansche Normalform von A_a ist.

Lösung zu Aufgabe II.1:

(a) A_a hat den einzigen Eigenwert a^2. Das charakteristische Polynom von A_a ist $(a^2 - X)^3$. Wir berechnen den Eigenraum E_{a^2} zum Eigenwert a^2, wobei

$$E_{a^2} = \operatorname{Kern}(A_a - a^2 I_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sei zunächst $a = 0$. Dann gilt $E_0 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$, also $\dim(E_0) = 2$. Somit gibt es zwei Kästchen, d.h. die JNF von A_0 ist $J_0 := \left(\begin{array}{|cc|c} \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{0} \\ \cline{3-3} \end{array}\right)$.

- Sei nun $a \neq 0$. Dann gilt $E_{a^2} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$, also $\dim(E_{a^2}) = 1$. Somit gibt es ein Kästchen, d.h. die JNF von A_a ist $J_a := \left(\boxed{\begin{array}{ccc} a^2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 \end{array}}\right)$.

(b)
- Sei zunächst $a = 0$.
  Wähle $b_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_0$ beliebig. Setze $b_2 := (A_0 - 0I_3)b_1$. Wähle $b_3 \in E_0 \cap (\mathbb{R}^3 \setminus [b_1, b_2])$ beliebig. Setze schließlich $S_0 := (b_1|b_2|b_3)$. Konkret erhält man:

  $$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := (A_0 - 0I_3)b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Somit gilt für S_0 gerade $S_0^{-1} A_0 S_0 = J_0$.
- Sei nun $a \neq 0$.
  Wähle $b_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus E_a$ beliebig, setze $b_2 := (A_a - a^2 I_3)b_1$ und $b_3 := (A_a - a^2 I_3)b_2$. Dann ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und $S_a := (b_1|b_2|b_3)$ leistet das Gewünschte. Konkret erhält man

  $$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := (A_a - a^2 I_3)b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := (A_a - a^2 I_3)b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2 \end{pmatrix}, \quad S_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 4a^2 \end{pmatrix}.$$

  Somit gilt für S_a gerade $S_a^{-1} A_a S_a = J_a$.

II.2 (4 Punkte)

In $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$ sind die affinen Unterräume

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}] \qquad \text{und} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

gegeben. Hier bezeichnet $[\ldots]$ die lineare Hülle.

(a) Bestimmen Sie den Abstand $d(E, G)$ von E und G.

(b) Bestimmen Sie Punkte $x_0 \in E$ und $y_0 \in G$ mit $d(E, G) = \|x_0 - y_0\|$.

Lösung zu Aufgabe II.2

Wir setzen

$$u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad u_3 := y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so dass $E = y_1 + [u_1, u_2]$ und $G = y_2 + [u_3]$.

(a) Wir bilden zunächst $U := [u_1, u_2, u_3]^\perp$, den Unterraum aller Vektoren, die sowohl zu E als auch zu G orthogonal sind. Es gilt $x \in U$ genau dann, wenn $\langle u_i, x\rangle = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Als Lösungsmenge dieses LGS ergibt sich

$$U = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}] = [u], \qquad \text{wobei} \qquad u := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

normiert ist ($\{u\}$ ist somit eine ONB von U). Die Orthogonalprojektion $\Pi_U(x)$ eines Vektors $x \in \mathbb{R}^4$ auf U ist dann gegeben durch $\Pi_U(x) = \langle x, u\rangle u$. Für den Abstand der Unterräume gilt $d(E, G) = ||\Pi_U(y_2 - y_1)||$, wobei

$$\Pi_U(y_2 - y_1) = \Pi_U(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u\rangle u = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =: v,$$

also $d(E, G) = ||v|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(b) Für die Lotfußpunkte $x \in E$ und $y \in G$ gilt $y - x = \Pi_U(y_2 - y_1)$. Gesucht sind also $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, so dass $y - x = \Pi_U(y_2 - y_1) = v$, wobei $x = y_1 - a_1u_1 - a_2u_2$ und $y = y_2 + a_3u_3$, d.h. $v = y - x = y_2 - y_1 + a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$. Es ergibt sich das LGS $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = b$ mit

$$b = v - (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

das als einzige Lösung $a_1 = 7/2$, $a_2 = 3/2$, $a_3 = -2$ hat. Also sind die Lotfußpunkte

$$x = y_1 - \frac{7}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y = y_2 - 2u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Rechnungen vereinfachen sich etwas, wenn man zunächst

$$[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

verwendet.

II.3 (4 Punkte)

Nachfolgend seien $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{2n}$ jeweils mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet.
Seien $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ definiert als $\Phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := \varphi(x)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mit $\varphi^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\Phi^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ werden die zugehörigen adjungierten Abbildungen bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\Phi^*(x) = \begin{pmatrix} \varphi^*(x) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

(b) Beweisen Sie:

$$\dim \text{Bild}(\Phi^*) = n - \dim \text{Kern}(\varphi).$$

Lösung zu Aufgabe II.3

(a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \Phi^*(x), \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rangle = \langle x, \Phi(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}) \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^*(x), y \rangle = \langle \begin{pmatrix} \varphi^*(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rangle,$$

wobei die Definition der adjungierten Abbildung und die Definition von Φ verwendet wurden. Da dies bei gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ für alle $y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt (a).

(b) Aus Teil (a) folgt sofort

$$\dim \mathrm{Bild}(\Phi^*) = \dim \mathrm{Bild}(\varphi^*).$$

Mit Hilfe der eventuell aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Gleichung

$$(\text{Bild}(\varphi^*))^\perp = \text{Kern}(\varphi) \tag{$\diamond$}$$

erhält man

$$\dim \mathrm{Bild}(\varphi^*) = n - \dim \mathrm{Kern}(\varphi),$$

was (b) beweist.

Nachweis von Gleichung ($\diamond$):

„$\supseteq$“ : Sei $x \in \text{Kern}(\varphi)$ und $y \in \text{Bild}(\varphi^*)$. Dann ist $\varphi(x) = 0$ und es gibt ein $z \in \mathbb{R}^n$ mit $y = \varphi^*(z)$. Es folgt

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \varphi^*(z) \rangle = \langle \varphi(x), z \rangle = 0,$$

und somit $x \in (\text{Bild}(\varphi^*))^\perp$.

„$\subseteq$“ : Sei $x \in (\text{Bild}(\varphi^*))^\perp$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$

$$0 = \langle x, \varphi^*(z) \rangle = \langle \varphi(x), z \rangle,$$

das ergibt $\varphi(x) = 0$ und damit $x \in \text{Kern}(\varphi)$.

II.4 (4 Punkte)

Es sei Φ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft

$$\Phi^3 = \mathrm{id}.$$

(a) Geben Sie alle möglichen euklidischen Normalformen für die Isometrie Φ an. Wählen Sie dabei auftretende Drehwinkel immer zwischen 0 und π.

(b) Für welche dieser Normalformen gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, sodass x und $\Phi(x)$ orthogonal sind?

Lösung zu Aufgabe II.4

Es bezeichne I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix, $D_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ das Drehkästchen zum Winkel φ, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt.

(a) Da $\Phi^3 = \mathrm{Id}$ gilt, ist -1 kein Eigenwert von Φ. Da die Dimension von $\mathbb{R}^4$ gerade ist, ist die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 1 gerade. Die Normalform A ist also von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} D_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & D_{\varphi_2} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$I_4 = A^3 = \begin{pmatrix} D_{\varphi_1}^3 & 0 \\ 0 & D_{\varphi_2}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{3\varphi_1} & 0 \\ 0 & D_{3\varphi_2} \end{pmatrix}.$$

Daher ist $3\varphi_i \in 2\pi\mathbb{Z}$ und jedes der Drehkästchen ist eines der folgenden:

$$D_0 = I_2 \quad \text{oder} \quad D_{\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die drei möglichen Normalformen

$$A_1 := \begin{pmatrix} D_0 & \\ & D_0 \end{pmatrix} = I_4, \quad A_2 := \begin{pmatrix} D_0 & \\ & D_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} D_{\frac{2\pi}{3}} & \\ & D_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

(b) Nun gehen wir die drei Möglichkeiten durch und untersuchen, wann es einen Vektor $x \neq 0$ mit $x \perp \Phi(x)$ gibt. Ohne Einschränkung sei hierbei Φ bezüglich der Standardbasis durch eine der Normalformen A_i beschrieben.

$\underline{\Phi \hat{=} A_1}$: Hier ist $\Phi = \mathrm{Id}$, und kein Vektor $x \neq 0$ steht auf seinem Bild senkrecht.

$\underline{\Phi \hat{=} A_2}$: Eine direkte Rechnung mit Hilfe der Matrixdarstellung A_2 von Φ ergibt dann

$$\langle x, \Phi(x) \rangle = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2).$$

Hieran liest man ab, dass z.B. für $x_1 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$ die Vektoren x und $\Phi(x)$ orthogonal sind.

$\underline{\Phi \hat{=} A_3}$: Eine direkte Rechnung mit Hilfe der Normalform von Φ ergibt hier $\langle x, \Phi(x) \rangle = -\frac{1}{2}\|x\|^2 \neq 0$ für $x \neq 0$. In diesem Fall gibt es also keinen Vektor $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, sodass x und $\Phi(x)$ orthogonal sind.

II.5 (4 Punkte)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ und Φ ein normaler Endomorphismus von V. Seien ferner $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $\varrho \geq 0$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Für jeden Eigenwert λ von Φ gilt $|\lambda| \leq \varrho$.

(ii) $\|\Phi(x)\| \leq \varrho\,\|x\|$ für alle $x \in V$.

(iii) $\|\Phi^k(x)\| \leq \varrho^k\,\|x\|$ für alle $x \in V$.

Lösung zu Aufgabe II.5

Da Φ ein normaler Endomorphismus von V ist, hat V eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ aus Eigenvektoren mit entsprechenden Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Für alle $x \in V$ mit $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$ gilt

$$\langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \Phi(b_i), \sum_{i=1}^n x_i \Phi(b_i) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i b_i, \sum_{i=1}^n x_i \lambda b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\lambda_i} \langle x_i b_i, x_i b_i\rangle$$

Das Skalarprodukt ist positiv definit und $\lambda_i \bar{\lambda_i} = |\lambda_i|^2 \geq 0$. Deswegen folgt

$$\langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle \leq \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2 \sum_{i=1}^n \langle x_i b_i, x_i b_i\rangle = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2 \langle x, x\rangle .$$

Also ist

$$\|\Phi(x)\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|\right) \|x\| .$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn x Eigenvektor zum maximalen Eigenwert ist.

(i)⇒(ii) Falls für alle $i = 1, \dots, n$ gilt $|\lambda_i| \leq \rho$, dann ist

$$\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \leq \rho$$

und somit $\|\Phi(x)\| \leq \rho\,\|x\|$.

(ii)⇐(i) Falls $\|\Phi(x)\| \leq \rho\,\|x\|$ für alle $x \in V$ gilt, dann ist $|\lambda| \leq \rho$ für jeden Eigenwert λ. Also folgt **(i)**.

(i)⇔(iii) Φ^k hat die gleiche Basis aus Eigenvektoren, aber zu den Eigenwerten $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Die Behauptung folgt dann aus $|\lambda| \leq \rho \Leftrightarrow |\lambda^k| \leq \rho^k$ und (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

II.6 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei Quadriken durch die Gleichungen

$$\begin{array}{lccccccl} Q_1: & x^2 & + & 4xy & + & 6y^2 & = 1 \\ Q_2: & x^2 & + & 6xy & + & 12y^2 & = 1 \end{array}$$

erklärt.

(a) Zeigen Sie, dass Q_1 und Q_2 affin äquivalent sind.
Geben Sie eine Affinität des $\mathbb{R}^2$ an, die Q_1 auf Q_2 abbildet.

(b) Sind Q_1 und Q_2 euklidisch äquivalent? (Begründung!)

Lösung zu Aufgabe II.6

(a) Mit quadratischer Ergänzung folgt sofort

$$\begin{array}{lcccl} Q_1: & (x+2y)^2 & + & 2y^2 & = 1 \\ Q_2: & (x+3y)^2 & + & 3y^2 & = 1, \end{array}$$

so dass Q_1 und Q_2 beide die affine Normalform $x^2+y^2=1$ haben und daher affin äquivalent sind. Um eine Affinität zu erhalten, die Q_1 auf Q_2 abbildet, schreiben wir

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2y)^2 + 2y^2 = 1\} \\ &= \{(\bar{x} - \sqrt{2}\bar{y}, \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y})^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1\} \\ &= \varphi(S^1) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \qquad S^1 := \{(\bar{x},\bar{y})^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1\}.$$

Ebenso erhält man

$$Q_2 = \psi(S^1) \quad \text{mit} \quad \psi(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher

$$Q_2 = \psi(S^1) = \psi(\varphi^{-1}(Q_1)) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} Q_1.$$

Die Affinität

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

bildet somit Q_1 auf Q_2 ab.

(b) Die Quadriken Q_1 und Q_2 sind nicht euklidisch äquivalent, da sie nicht dieselben Hauptachsenlängen haben. Die Hauptachsenlängen von Q_1 bzw. Q_2 ergeben sich als die Eigenwerte von

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom p_1 von M_1 ist $p_1(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 2$, das charakteristische Polynom p_2 von M_2 ist $p_2(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 3$, also haben p_1 und p_2 nicht dieselben Nullstellen.