Lösungsskizzen zur Klausur

Lineare Algebra I & II

Frühjahr 2012

Aufgabe I.1

Es sei Q die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

Hier bezeichnet der Querstrich die komplexe Konjugation.

Zeigen Sie:

(a) Mit den üblichen Verknüpfungen + und · für Matrizen ist Q ein Teilring von $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

(b) Für jedes Element $q \in Q$ mit $q \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ existiert ein Element $p \in Q$, so dass gilt:

$$p \cdot q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = q \cdot p$$

(c) Der Ring Q ist kein Körper.

Lösung

ad (a): Zu zeigen ist, dass $(Q, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^{2\times 2}, +)$ und abgeschlossen bzgl. der Multiplikation ist. Es seien $q_i = \left(\begin{smallmatrix} a_i & -b_i \\ \overline{b_i} & \overline{a_i} \end{smallmatrix}\right) \in Q$ für $i \in \{1, 2\}$. Da die komplexe Konjugation ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist, gilt für die Differenz

$$q_1 - q_2 = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & -b_1 + b_2 \\ \overline{b_1} - \overline{b_2} & \overline{a_1} + \overline{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & -b_1 + b_2 \\ \overline{b_1 - b_2} & \overline{a_1 - a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in Q,$$

wobei $a = a_1 - a_2, b = b_1 - b_2 \in \mathbb{C}$. Entsprechend gilt für das Produkt

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 \overline{b}_2 & -a_1 b_2 - \overline{a}_2 b_1 \\ a_2 \overline{b}_1 + \overline{a}_1 \overline{b}_2 & -\overline{b}_1 b_2 + \overline{a}_1 \overline{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 \overline{b}_2 & -a_1 b_2 - \overline{a}_2 b_1 \\ \overline{a_1 b_2 + \overline{a}_2 b_1} & \overline{a_1 a_2 - b_1 \overline{b}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in Q,$$

wobei $a = a_1 a_2 - b_1 \overline{b}_2, b = a_1 b_2 + \overline{a}_2 b_1 \in \mathbb{C}$.

ad (b): Es sei $q = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right)$. Da $\det(q) = a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 > 0$ gilt, ist q in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar und sein Inverses

$$p = \frac{1}{\det(q)} \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2},$$

liegt bereits in Q, denn

$$p = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \overline{b'} & \overline{a'} \end{pmatrix} \in Q$$

für die komplexen Zahlen $a' = \frac{\overline{a}}{|a|^2 + |b|^2}$ und $b' = \frac{-b}{|a|^2 + |b|^2}$.

ad (c) Die Multiplikation in Q ist nicht kommutativ. Das sieht man beispielsweise an der folgenden Rechnung; beachte dabei $\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \overline{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \overline{\mathrm{i}} \end{pmatrix}$$

In einem Körper muss die Multiplikation aber kommutativ sein. Somit ist Q kein Körper.

Aufgabe I.2

Es sei K ein Körper.

(a) Formulieren Sie die Dimensionsformel für Homomorphismen zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen.

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $v \in K^n$.

Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraumes

$$W = \{A \in K^{n\times n} \mid Av = 0\}$$

von $K^{n\times n}$.

Lösung

ad (a): Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\Phi : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Dann gilt:

$$\dim \operatorname{Kern} \Phi + \dim \operatorname{Bild} \Phi = \dim V$$

ad (b): Wir betrachten die Abbildung $\Phi : K^{n\times n} \longrightarrow K^n, A \longmapsto Av$. Dies ist ein Vektorraumhomomorphismus, denn $K^{n\times n}$ und K^n sind (endlichdimensionale) Vektorräume und für alle $a \in K$, sowie $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:

$$\Phi(aA + B) = (aA + B)v = aAv + Bv = a\Phi(A) + \Phi(B)$$

Außerdem gilt $W = \{A \in K^{n\times n} \mid Av = 0\} = \operatorname{Kern} \Phi$ und mit der Dimensionsformel aus Teil (a) erhalten wir:

$$\dim W = \dim \operatorname{Kern} \Phi = \dim K^{n\times n} - \dim \operatorname{Bild} \Phi = n^2 - \dim \operatorname{Bild} \Phi$$

Für die Bestimmung von $\dim \operatorname{Bild} \Phi$ treffen wir eine Fallunterscheidung zwischen $v = 0$ und $v \neq 0$. Im Fall $v = 0$ ist $\operatorname{Bild} \Phi = \{A \cdot 0 \mid A \in K^{n\times n}\} = \{0\}$, also $\dim \operatorname{Bild} \Phi = 0$. Im Fall $v \neq 0$ ist $\operatorname{Bild} \Phi = K^n$: Offensichtlich gilt $\operatorname{Bild} \Phi \subseteq K^n$. Andererseits gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass der i-te Eintrag v_i von v nicht 0 ist. Es sei A_j die Matrix, die an der Stelle a_{ji} den Eintrag $\frac{1}{v_i}$ und sonst nur Nullen hat. Dann ist $A_j v$ der j-te Einheitsvektor. Es liegen also alle Einheitsvektoren im Bild von Φ und, da $\operatorname{Bild} \Phi$ ein Untervektorraum von K^n ist, auch deren Aufspann, also $K^n \subseteq \operatorname{Bild} \Phi$. Insbesondere ist $\dim \operatorname{Bild} \Phi = n$.

Es gilt also $\dim W = n^2$ falls $v = 0$ oder $\dim W = n^2 - n = n(n-1)$ falls $v \neq 0$.

Aufgabe I.3

Es sei das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & -1 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Lösungsmenge obigen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge obigen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lösung

ad (a): Der Gauß-Algorithmus über $\mathbb{Q}$ liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 \end{array}\right)$$

Für $\alpha = 2$ ist z frei wählbar und es folgt $y = 1 - z$ und $x = -1 - (1 - z) = -2 + z$. Die Lösungsmenge lautet in diesem Fall:

$$\mathbb{L}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \right\}$$

Für $\alpha \neq 2$ gilt $z = 0, y = 1$ und $x = -2$. Die Lösungsmenge lautet dann:

$$\mathbb{L}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ad (b): Der Gauß-Algorithmus über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

Für $\alpha = 1$ gilt $z = 0$, y ist frei wählbar und es folgt $x = 1 - y = 1 + y$. Die Lösungsmenge lautet dann:

$$\mathbb{L}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für $\alpha = 0$ sind y, z frei wählbar und es folgt $x = 1 - y = 1 + y$. Die Lösungsmenge lautet dann:

$$\mathbb{L}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe I.4

Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume, V^* und W^* die Dualräume von V bzw. W und $\Phi : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus. Es bezeichne $\Phi^* : W^* \longrightarrow V^*$ die zu Φ duale Abbildung.

(a) Geben Sie die Φ^* definierende Abbildungsvorschrift an.

(b) Es gelte nun $W = V$. Des Weiteren sei U ein Untervektorraum von V.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Der Untervektorraum U ist in Kern Φ enthalten.

(ii) Für alle $\varphi \in V^*$ ist U ein Untervektorraum von Kern $\Phi^*(\varphi)$.

Lösung

ad (a): Die zu Φ duale Abbildung $\Phi^* : W^* \longrightarrow V^*$, $\varphi \longmapsto \Phi^*(\varphi)$ ist wie folgt gegeben: Für $v \in V$ definiere $\Phi^*(\varphi)(v) = \varphi(\Phi(v))$.

ad (b): (i) $\Rightarrow$ (ii): Es seien $\varphi \in V^*$ und $u \in U$. Aus $u \in \operatorname{Kern}\Phi$ folgt dann $\Phi^*(\varphi)(u) = \varphi(\Phi(u)) = \varphi(0) = 0$, also insbesondere $u \in \operatorname{Kern}\Phi^*(\varphi)$. Somit gilt $U \subseteq \operatorname{Kern}\Phi^*(\varphi)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist U nicht in $\operatorname{Kern}\Phi$ enthalten, so existiert ein $u \in U$ mit $\Phi(u) \neq 0$. Dann lässt sich nach dem Basisergänzungssatz $v_1 = \Phi(u)$ zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_k\}$ mit $k = \dim V$ ergänzen. Da V endlichdimensional ist, existiert die dazu duale Basis $\{v_1^*, \ldots, v_k^*\}$. Nun folgt aus

$$\Phi^*(v_1^*)(u) = v_1^*(\Phi(u)) = v_1^*(v_1) = 1 \neq 0,$$

dass $u \notin \operatorname{Kern}\Phi(v_1^*)$ gilt. Die Aussage (ii) gilt also nicht.

Aufgabe I.5

Es sei für $s \in \mathbb{R}$ die reelle Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2s & 2s+2 \\ -s^2+s & 1 & -s+1 & 2s^2-s-1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -s & s+2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_s.

(b) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die A_s diagonalisierbar ist.

(c) Berechnen Sie für $s = 0$ eine Basis aus Eigenvektoren.

Lösung

ad (a): Es ist $X \in \mathbb{R}$ genau dann Eigenwert von A_s, wenn X Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\mathrm{CP}_{A_s}(X) = \det(A_s - XI)$ ist, wobei I die Einheitsmatrix bezeichne. Also genau dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{CP}_{A_s}(X) &= \det\begin{pmatrix} -1-X & 0 & -2s & 2s+2 \\ -s^2+s & 1-X & -s+1 & 2s^2-s-1 \\ -1 & 0 & -X & 2 \\ -1 & 0 & -s & s+2-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)\det\begin{pmatrix} 1-X & 0 & -2+2X \\ 0 & s-X & X-s \\ -1 & -s & s+2-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)^2(s-X)(-X) \end{aligned}$$

Dies tritt genau dann ein, wenn $X \in \{0, 1, s\}$ gilt.

ad (b): Zur Untersuchung der Diagonalisierbarkeit von A_s muss überprüft werden, wann die geometrische Vielfachheit (also die Dimension des Eigenraumes) jedes Eigenwertes mit seiner algebraischen Vielfachheit (also der Potenz des zugehörigen Linearfaktors im charakteristischen Polynom) übereinstimmt. Wir betrachten zunächst den Eigenraum E_1 zum Eigenwert 1: Es gilt $\dim E_1 = 4 - \mathrm{Rang}(A_s - I)$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A_s - I) &= \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2s & 2s+2 \\ -s^2+s & 0 & -s+1 & 2s^2-s-1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -s & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} s(1-s) & 0 & 0 & 2s(s-1) \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-s & s-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 1 \text{ für } s = 1, \\ 2 \text{ für } s = 0, \\ 3 \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hiermit folgt, dass die Matrix A_s für $s \notin \{0,1\}$ nicht diagonalisierbar ist, da $\dim E_1 = 1$ gilt, die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 jedoch zwei beträgt. Für $s = 1$ ist $\dim E_1 = 3$. Das charakteristische Polynom hat die Form $\mathrm{CP}_{A_1}(X) = (1-X)^3(-X)$ und A_1 ist somit diagonalisierbar. Für $s = 0$ ergibt sich nun für die Dimension des Eigenraumes E_0 zum Eigenwert 0

$$\dim E_0 = 4 - \mathrm{Rang}(A_0 - 0 \cdot I) = 4 - \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten beider Eigenwerte stimmen jeweils überein, was zeigt, dass A_0 diagonalisierbar ist.

Zusammenfassend ist also A_s genau dann diagonalisierbar, wenn $s \in \{0,1\}$ gilt.

ad (c): An den Matrizen aus Teil (b) liest man für $s = 0$ die entsprechenden Eigenräume ab.

$$E_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad E_0 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Diese vier erzeugenden Vektoren bilden damit aus Dimensionsgründen eine Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe I.6

Für die natürliche Zahl n sei A_n die reelle $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{falls } i = j-1, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ -j & \text{falls } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = n!$ gilt.

Lösung

Es gilt:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1-n & 1 \end{pmatrix}$$

Für $i = 1, \ldots, n$ addieren wir jeweils die i-te Zeile zu der $(i+1)$-ten Zeile und erhalten:

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Entwickeln wir nun nach der ersten Spalte, ergibt sich $\det(A_n) = n!$.

Aufgabe II.1

Es sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ sowie das Minimalpolynom m von A, und geben Sie eine reguläre Matrix S an, so dass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

Lösung

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{CP}_A(X) &= \det\begin{pmatrix} X-1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \\
&= -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} + X\det\begin{pmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \\
&= -(1+X-2) + X((X-1)^2(X-2)+1+X-2) = (X-1)^4.
\end{aligned}$$

Hier haben wir erst nach der zweiten Zeile entwickelt und dann die Regel von Sarrus verwandt.

Die einzige Nullstelle von $\mathrm{CP}_A(X)$ ist 1, und demnach ist 1 der einzige Eigenwert von A. Insbesondere ist $\mathbb{R}^4$ der Hauptraum zum Eigenwert 1, und wir bestimmen die Größen der Jordan-Kästchen, indem wir die Ränge der Potenzen $(A-I)^k$ berechnen. Es ist

$$\mathrm{Rang}(A-I) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

und daher gibt es zwei Jordan-Kästchen, denn der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 hat Dimension $4 - \mathrm{Rang}(A-I) = 2$. Da

$$\mathrm{Rang}((A-I)^2) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

gilt, gibt es mindestens ein Jordan-Kästchen der Länge ≥ 3, also wegen der Größe der Matrix genau eines der Länge 3 und eines der Länge 1.

Mithin folgt für die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ und das Minimalpolynom m:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad m(X) = (X-1)^3$$

Nun wählen wir einen Vektor b_2 außerhalb von $\mathrm{Kern}((A-I)^2)$, und setzen dann $b_3 = (A-I)b_2$, $b_4 = (A-I)b_3$ und ergänzen diese durch Wahl eines Vektors $b_1 \in \mathrm{Kern}(A-I)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$. Konkret:

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$S = (b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix mit $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.

Aufgabe II.2

Es sei $\mathbb{R}^5$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Der Untervektorraum U werde von den folgenden Vektoren aufgespannt:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Des Weiteren sei der Vektor $v = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Finden Sie eine Basis von $U^\perp$.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ an.

(c) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\pi_{U^\perp}(v)$ von v auf $U^\perp$.

(d) Berechnen Sie den Abstand zwischen v und U.

Lösung

ad (a): $U^\perp$ ist der Lösungsraum des folgenden LGS:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir eine Basis für $U^\perp$ ab:

$$c_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

ad (b): Die Basis aus Teil (a) ist bereits eine Orthogonalbasis. Es bleibt nur noch, die Vektoren zu normieren. Wir erhalten somit die folgende Orthonormalbasis:

$$b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

ad (c): Die orthogonale Projektion ist $\pi_{U^\perp}(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 = b_1$.

ad (d): Der Abstand von v zu U beträgt $d(v,U) = \|\pi_{U^\perp}(v)\| = \|b_1\| = 1$.

Aufgabe II.3

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und ψ ein Endomorphismus von V.

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Der Endomorphismus ψ ist eine selbstadjungierte Isometrie.

(ii) Es gibt eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V aus Eigenvektoren von ψ und Eigenwerte $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ mit $\psi(v_i) = \varepsilon_i v_i$ für $1 \le i \le n$.

Lösung

Der aus der Vorlesung bekannte Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen besagt, dass ein Endomorphismus ψ eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes V genau dann selbstadjungiert ist, wenn es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von ψ gibt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Der Endomorphismus ψ sei eine selbstadjungierte Isometrie. Dann existiert nach dem Spektralsatz eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V aus Eigenvektoren von ψ. Da ψ eine Isometrie ist, gilt $\langle v, w \rangle = \langle \psi(v), \psi(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$. Es sei ε_i der Eigenwert von ψ zum Eigenvektor v_i, dann gilt

$$1 = \langle v_i, v_i \rangle = \langle \psi(v_i), \psi(v_i) \rangle = \langle \varepsilon_i v_i, \varepsilon_i v_i \rangle = \varepsilon_i^2 \langle v_i, v_i \rangle = \varepsilon_i^2$$

und es folgt $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei nun $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von ψ und es gelte $\psi(v_i) = \varepsilon_i v_i$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Nach dem Spektralsatz ist ψ selbstadjungiert. Um zu beweisen, dass ψ eine Isometrie ist, zeigen wir $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren $v, w \in V$: Es seien $v, w \in V$. Dann existieren $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ gilt und es folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \psi(v), \psi(w) \rangle &= \langle \psi(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i), \psi(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j) \rangle \\
&\overset{\psi \text{ ist linear}}{=} \langle \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(v_i), \sum_{j=1}^n \beta_j \psi(v_j) \rangle \\
&= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \varepsilon_j v_j \rangle \\
&\overset{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ ist bilinear}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \beta_j \varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle \\
&\overset{\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \varepsilon_i^2 \langle v_i, v_i \rangle \\
&\overset{\varepsilon_i^2 = 1}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \langle v_i, v_i \rangle \\
&\overset{\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle v_i, v_j \rangle \\
&\overset{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ ist bilinear}}{=} \langle \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \rangle \\
&= \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe II.4

Es seien $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und es bezeichne $\| \cdot \|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Weiterhin sei Φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft, dass für alle Untervektorräume U von V

$$\Phi(U^\perp) = (\Phi(U))^\perp$$

gilt.

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ folgt aus $\langle x, y \rangle = 0$ stets $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = 0$.

(b) Für alle $x, y \in V$ folgt aus $\|x\| = \|y\|$ stets $\|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$.

(c) Es gibt eine Isometrie Ψ von V und ein $c \neq 0$ mit $\Phi = c \cdot \Psi$.

Lösung

ad (a): Es seien $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$, also $y \in [x]^\perp$. Nach Voraussetzung gilt dann $\Phi(y) \in [\Phi(x)]^\perp$, also $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = 0$.

ad (b): Es seien $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$. Dann folgt aus

$$\langle x+y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

mit (a), dass

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(x+y), \Phi(x-y) \rangle \\ &= \langle \Phi(x) + \Phi(y), \Phi(x) - \Phi(y) \rangle \\ &= \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle - \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle + \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle - \langle \Phi(y), \Phi(y) \rangle \\ &= \|\Phi(x)\|^2 - \|\Phi(y)\|^2 \end{aligned}$$

gilt und somit $\|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$ erfüllt ist.

ad (c): Wegen $\Phi(V) = \Phi([0]^\perp) = \Phi([0])^\perp = [0]^\perp = V$ ist Φ surjektiv, und da V endlichdimensional ist, ist Φ ein Automorphismus. Wir zeigen zunächst, dass ein $c > 0$ existiert, so dass $\|\Phi(x)\| = c\|x\|$ für alle $x \in V$ gilt: Für $x, y \in V \setminus \{0\}$ existieren $c_x > 0$ und $c_y > 0$ mit $\|\Phi(x)\| = c_x\|x\|$ und $\|\Phi(y)\| = c_y\|y\|$. Dann gilt wegen

$$\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \left\| \frac{1}{\|y\|} y \right\|$$

nach (b) auch

$$\left\| \Phi\Big(\frac{1}{\|x\|} x \Big) \right\| = \left\| \Phi\Big(\frac{1}{\|y\|} y \Big) \right\|.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$c_x = \frac{\|\Phi(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|\Phi(y)\|}{\|y\|} = c_y.$$

Es sei $c = c_x$ und $\Psi = c^{-1}\Phi$. Dann gilt $\|\Psi(x)\| = c^{-1}\|\Phi(x)\| = c^{-1}c\|x\| = \|x\|$ für alle $x \in V$. Damit ist Ψ eine Isometrie und es gilt $\Phi = c \cdot \Psi$.

Aufgabe II.5

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = 1$.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt $v, w \in \mathbb{C}^n$, so dass $v \cdot w^* = A$ gilt; dabei sei $w^* = \overline{w}^\top$.

(b) Die Matrix A ist genau dann normal, wenn v und w aus Teil (a) linear abhängig sind.

Lösung

ad (a): Da A Rang 1 hat, sind die Spalten paarweise linear abhängig und es gibt eine von Null verschiedene Spalte. Es sei v diese von Null verschiedene Spalte. Dann ist die i-te Spalte von A gleich $\overline{w_i}v$ für eine komplexe Zahl w_i und es folgt

$$A = \left(\overline{w_1}v\ \overline{w_2}v\ \dots\ \overline{w_n}v\right) = v \cdot \overline{w}^\top = v \cdot w^*.$$

ad (b): Es seinen v und w wie oben. Dann gilt

$$A^* = \overline{A}^\top = w \cdot v^*$$

und es folgt

$$A \cdot A^* = (w^* \cdot w) v \cdot v^*$$

sowie

$$A^* \cdot A = (v^* \cdot v) w \cdot w^*.$$

Sind v und w linear abhängig, so ist $w = cv$ für eine komplexe Zahl c und aus obiger Rechnung folgt

$$A \cdot A^* = |c|^2 (v^* \cdot v) v \cdot v^* = A^* \cdot A,$$

also ist A ist normal.

Wenn umgekehrt A normal ist, dann gilt $A \cdot A^* = A^* \cdot A$. Nun sind aber die Spalten der linken Matrix Vielfache von v, während die Spalten der rechten Matrix Vielfache von w sind. Aus der Gleichheit der beiden Matrizen folgt, dass v und w Vielfache voneinander sind, also auch linear abhängig.

Aufgabe II.6

Es seien g_1, g_2, g_3 Geraden in $\mathbb{R}^2$, dabei seien g_1 und g_2 nicht parallel. Weiterhin seien Parameter $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$ gegeben, so dass

$$g_i = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a_i x + b_i y + c_i = 0 \right\}$$

gilt.

Zeigen Sie, dass g_1, g_2 und g_3 genau dann einen gemeinsamen Punkt besitzen, wenn gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Wenn $\binom{x}{y}$ ein gemeinsamer Punkt der drei Geraden ist, dann gilt $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, und da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht 0 ist, ist A nicht invertierbar, also gilt $\det(A) = 0$.

Wenn umgekehrt $\det(A) = 0$ erfüllt ist, dann gibt es einen von 0 verschiedenen Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $Av = 0$. Da die ersten beiden Geraden nicht parallel sind, sind auch ihre Normalenvektoren $\binom{a_1}{b_1}$ und $\binom{a_2}{b_2}$ nicht parallel, und deshalb gilt $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Es folgt $z \neq 0$, da sonst

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

gälte, was wegen der Regularität der 2×2-Matrix auch $x = y = 0$ nach sich zöge. Nun können wir alles durch z teilen. Wegen

$$A \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ist damit $\binom{x/z}{y/z}$ ein Punkt, der auf allen drei Geraden liegt.