Prof. Dr. Roman Sauer
Dr. Malte Röer

Frühjahr 2014

Lineare Algebra I/II

herausgegeben von der Fachschaft Mathematik/Informatik, umbrochen von Manuel

Lineare Algebra I

Aufgabe I.1

a) Zeigen Sie, dass auf $M = \{\ (a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ die folgende Verknüpfung $*$ eine Gruppenstruktur definiert:

$$(a,b,c) * (x,y,z) := (a+x,\ b+y,\ c+z+ay)$$

b) Entscheiden Sie, ob die so definierte Gruppe $(M,*)$ kommutativ ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Weisen Sie nach, dass die Abbildung

$$\Phi\colon (M,*) \to (\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}),\cdot),\ \Phi((a,b,c)) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe I.2

Seien K ein Körper, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\Phi\colon V \to W$ ein K-Vektorraumhomomorphismus.

a) Formulieren Sie die Dimensionsformel für Φ.

Sei nun U ein Untervektorraum von W. Zeigen Sie:

b) Die Urbildmenge $\Phi^{-1}(U) = \{v \in V \mid \Phi(v) \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V.

c) Ist Φ surjektiv, so gilt: $\dim(\Phi^{-1}(U)) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi))$.

Aufgabe I.3

In Abhängigkeit vom Parameter α sei das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & \alpha y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 8 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ jeweils?

Aufgabe I.4

Für die natürliche Zahl n sei $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leq n\}$ der Vektorraum der reellen Polynome mit Grad $\leq n$. Weiter sei $D\colon V \to V$ der Endomorphismus, der $f \in V$ auf seine Ableitung schickt, also $D(f) = f'$.

a) Bestimmen Sie $D^i(X^k)$ für $i, k \in \{0, \ldots, n\}$.

Für $0 \leq i \leq n$ setzen wir $\varphi_i(f) = \frac{1}{i!} D^i(f)(0)$. Die Abbildung $\varphi_i\colon V \to \mathbb{R}$ ist eine Linearform auf V.

b) Weisen Sie nach, dass $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ die zur Basis $\{1, X, \ldots, X^n\}$ duale Basis des Dualraums V^* von V ist.

   Folgern Sie für $f \in V$ die Gleichheit $\quad f = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(f) \cdot X^i.$

c) Für $t \in \mathbb{R}$ ist
$$\lambda : V \to \mathbb{R}, \ \lambda(f) = f(t),$$
   eine Linearform auf V. Schreiben Sie λ als Linearkombination von $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$.

Aufgabe I.5

In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ sei die reelle Matrix
$$A_b = \begin{pmatrix} b & b-1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ b+1 & b-1 & -1 \end{pmatrix}$$
gegeben.

a) Für welche reellen Zahlen b ist A_b diagonalisierbar?

b) Bestimmen Sie für $b = 2$ eine invertierbare reelle Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass $D = S^{-1} A_2 \, S$ gilt.

Aufgabe I.6

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Die Matrix $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei gegeben durch
$$a_{ij} = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq j, \\ x_j & \text{falls } i > j. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.

b) Berechnen Sie $\det(A_n)$ allgemein.

Lineare Algebra II

Aufgabe II.1
Sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Spur}(A) = 3$ und höchstens zwei Eigenwerten. Die Jordan'sche Normalform der Matrix A werde mit J bezeichnet.

a) Wie viele Jordankästchen zum Eigenwert 0 besitzt J?

b) Wieso hat A einen Eigenwert ungleich 0?

c) Welche Zahlen können als Dimension des Hauptraums zum von 0 verschiedenen Eigenwert auftreten?

d) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für J unter den gegebenen Einschränkungen.

Aufgabe II.2
Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix $F_{a,b} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben:

$$F_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche reellen Zahlen a und b ist $F_{a,b}$ die Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$?

b) Sei nun $a = 3$ und $b = 1$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Skalarprodukts, das für $x, y \in \mathbb{R}^4$ durch

$$\langle x, y\rangle = x^\top \cdot F_{3,1} \cdot y$$

definiert ist.

Aufgabe II.3
Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^3$, für die $\det(\Phi) = -1$ gilt. Weiter gelten

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sowie } \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ an, sodass die Abbildungsmatrix $D_{BB}(\Phi)$ in Isometrienormalform ist.

b) Geben Sie $D_{BB}(\Phi)$ an.

Aufgabe II.4
Seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $w_1, w_2 \in V \setminus \{0\}$ mit $\langle w_1, w_2 \rangle \neq 0$. Weiter sei der Endomorphismus

$$\Phi \colon V \longrightarrow V, \; \Phi(v) = \langle v, w_1 \rangle \cdot w_2$$

gegeben.

a) Geben Sie das Bild von Φ sowie den Rang von Φ an.
b) Ermitteln Sie alle Eigenwerte von Φ und die zugehörigen Eigenräume.
c) Bestimmen Sie die zu Φ adjungierte Abbildung Φ^*.
d) Zeigen Sie: Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn w_1 und w_2 linear abhängig sind.

Aufgabe II.5
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix mit der Eigenschaft

$$A^\top = -A.$$

a) Zeigen Sie, dass A keinen reellen Eigenwert hat, und folgern Sie, dass n gerade sein muss.
b) Weisen Sie nach, dass es reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_{n/2}$ und eine orthogonale Matrix S gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{n/2} \end{pmatrix},$$

wobei $M_i = \begin{pmatrix} 0 & -c_i \\ c_i & 0 \end{pmatrix}$.

c) Begründen Sie, wieso die Zahlen c_i in Aufgabenteil b) bis auf Reihenfolge und Vorzeichen eindeutig sind.

Aufgabe II.6
In $\mathbb{R}^3$ sei eine Quadrik H definiert durch

$$H = \{ \, (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}.$$

Sei $P = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H$.

Zeigen Sie, dass es genau zwei Richtungsvektoren $r = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt, sodass die affine Gerade $\{P + t \cdot r \mid t \in \mathbb{R}\}$ ganz in H enthalten ist.

Lösungen Lineare Algebra I

Aufgabe I.1

a) M ist nicht leer. Wir zeigen nun, dass $*$ assoziativ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}((a,b,c)*(u,v,w))*(x,y,z) &= (a+u, b+v, c+w+av)*(x,y,z)\\ &= (a+u+x, b+v+y, c+w+av+z+ay+uy)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(a,b,c)*((u,v,w)*(x,y,z)) &= (a,b,c)*(u+x, v+y, w+z+uy)\\ &= (a+u+x, b+v+w, c+w+z+uy+av+ay)\end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke sind gleich. Das Neutralelement bezüglich $*$ ist $(0,0,0)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}&(a,b,c)*(0,0,0) = (a+0, b+0, c+0+a\cdot 0) = (a,b,c) \text{ sowie}\\ &(0,0,0)*(a,b,c) = (0+a, 0+b, 0+c+0\cdot b) = (a,b,c).\end{aligned}$$

Wir suchen nun noch das Inverse (x,y,z) zu $(a,b,c) \in M$. Es muss also $(a+x,\ b+y,\ c+z+ay) = (0,0,0)$ gelten, was nichts anderes heißt als $(x,y,z) = (-a, -b, ab-c)$. Auch $(x,y,z)*(a,b,c) = (0,0,0)$ ist hier erfüllt und damit existiert das Inverse zu (a,b,c) stets.

Somit ist $(M,*)$ eine Gruppe.

b) $(M,*)$ ist nicht kommutativ, da zum Beispiel gilt:

$$(1,0,0)*(0,1,0) = (1,1,1) \neq (1,1,0) = (0,1,0)*(1,0,0)$$

c) Offensichtlich ist Φ eine Abbildung von M nach $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$, denn $\Phi((a,b,c))$ hat Determinante 1. Wir müssen zeigen, dass für (a,b,c), $(x,y,z) \in M$ gilt:

$$\Phi\left((a,b,c)*(x,y,z)\right) = \Phi((a,b,c))\cdot\Phi((x,y,z)).$$

Tatsächlich rechnen wir aus:

$$\Phi\left((a,b,c)*(x,y,z)\right) = \Phi((a+x, b+y, c+z+ay)) = \begin{pmatrix}1 & a+x & c+z+ay\\ 0 & 1 & b+y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\Phi((a,b,c))\cdot\Phi((x,y,z)) = \begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x+a & z+ay+c\\ 0 & 1 & y+b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Die beiden rechten Matrizen sind gleich, und das war zu zeigen.

Aufgabe I.2

a) Es gilt $\dim(V) = \mathrm{Rang}(\Phi) + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi))$.

b) Da U ein Untervektorraum ist, gilt $0 \in U$. Φ ist ein Homomorphismus, also ist $\Phi(0) = 0$. Damit ist $0 \in \Phi^{-1}(0) \subseteq \Phi^{-1}(U)$ und $\Phi^{-1}(U) \neq \emptyset$.

Seien $v_1, v_2 \in \Phi^{-1}(U)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt $\Phi(v_1) \in U$ sowie $\Phi(v_2) \in U$ und somit

$$\Phi(v_1 + \lambda\cdot v_2) \overset{\Phi \text{ linear}}{=} \underbrace{\Phi(v_1)}_{\in U} + \lambda\cdot\underbrace{\Phi(v_2)}_{\in U} \in U\,.$$

Also ist $v_1 + \lambda\cdot v_2 \in \Phi^{-1}(U)$ und nach dem Untervektorraumkriterium ist $\Phi^{-1}(U)$ ein Untervektorraum.

c) Wir betrachten die Einschränkung $\Phi|_{\Phi^{-1}(U)} \colon \Phi^{-1}(U) \to W$ von Φ auf $\Phi^{-1}(U)$.
Es gilt $\mathrm{Bild}(\Phi|_{\Phi^{-1}(U)}) = U$: Für jedes $u' \in \Phi^{-1}(U)$ ist $\Phi(u') \in U$. Außerdem ist Φ surjektiv, also gibt es für jedes $u \in U$ ein $v \in V$ mit $\Phi(v) = u$. Dann ist $v \in \Phi^{-1}(U)$ und damit $u \in \Phi(\Phi^{-1}(U))$.
Da $0 \in U$ ist, ist $\mathrm{Kern}(\Phi) = \Phi^{-1}(0) \subseteq \Phi^{-1}(U)$. Also gilt $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\Phi|_{\Phi^{-1}(U)})$. Die Dimensionsformel für $\Phi|_{\Phi^{-1}(U)}$ besagt also:

$$\begin{aligned}
\dim(\Phi^{-1}(U)) &= \mathrm{Rang}(\Phi|_{\Phi^{-1}(U)}) + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi|_{\Phi^{-1}(U)})) \\
&= \dim(\mathrm{Bild}(\Phi|_{\Phi^{-1}(U)})) + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) \\
&= \dim(U) + \dim(\mathrm{Kern}(\Phi))
\end{aligned}$$

Aufgabe I.3

In Matrixform lässt sich dieses lineare Gleichungssystem folgendermaßen schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Auf diese Matrix wenden wir zunächst nur solche Schritte des Gauß-Algorithmus an, die sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ erlaubt sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha-4 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

a) Für das reelle Gleichungssystem mit $\alpha = 1 \in \mathbb{R}$ fahren wir fort mit

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \end{array} \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge gegeben durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Für das reelle Gleichungssystem mit $\alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$ fahren wir fort mit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{\alpha-1} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \end{array}$$

$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}
$$
$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}
$$
$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}
$$
$$
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.
$$

Also ist die Lösungsmenge gleich $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Für das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ schreiben wir ab jetzt -1 statt 2 und fahren nach den Umformungen vor a) fort mit

$$
\begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.
$$

Für $\alpha = 1$ kann man die Lösungsmenge also ablesen als $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Diese Lösungsmenge enthält neun Elemente.

Für $\alpha \neq 1$, also $\alpha = 0$ oder $\alpha = -1$, geht es weiter mit

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \mid \cdot \tfrac{1}{\alpha-1} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Lösungsmenge kann man ablesen als $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Sie enthält drei Elemente.

Aufgabe I.4

a) Behauptung: $D^i(X^k) = \begin{cases} \prod_{l=0}^{i-1}(k-l) \cdot X^{k-i} & , k-i \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über i:

Der Induktionsanfang ist wahr, denn $D^0 = \mathrm{Id}_V$, also ist $D^0(X^k) = X^k$.

Nun gelte die Behauptung für ein festes $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ und wir zeigen sie für $i+1$:

$$
\begin{aligned}
D^{i+1}(X^k) &= D(D^i(X^k)) \overset{I.V.}{=} \begin{cases} D(\prod_{l=0}^{i-1}(k-l) \cdot X^{k-i}) & , k-i \geq 0 \\ D(0) & , \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \prod_{l=0}^{i-1}(k-l) \cdot (k-i) \cdot X^{k-i-1} & , k-i-1 \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \prod_{l=0}^{i}(k-l) \cdot X^{k-(i+1)} & , k-(i+1) \geq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Mit Hilfe von Teil a) folgern wir:
Für $i < k$ gilt $\varphi_i(X^k) = \frac{1}{i!}D^i(X^k)(0) = \frac{1}{i!}\prod_{l=0}^{i-1}(k-l)\cdot 0^{k-i} = 0$,
für $i = k$ ist $\varphi_i(X^k) = \frac{1}{i!}D^i(X^k)(0) = \frac{1}{i!}\prod_{l=0}^{i-1}(i-l)\cdot 0^0 = \frac{i!}{i!} = 1$ und
für $i > k$ gilt $D^i(X^k) = 0$, also auch $\varphi_i(X^k) = \frac{1}{i!}D^i(X^k)(0) = 0$.

Somit gilt $\varphi_i(X^k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & , i \neq k \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$, also ist $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ die zu $\{1, X, \dots, X^n\}$ duale Basis von V^*.

Für $f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot X^i \in V$ gilt

$$\varphi_j(f) \overset{\varphi_j \text{ ist linear}}{=} \sum_{i=0}^n a_i \varphi_j(X^i) \overset{\varphi_j(X^i)=\delta_{j,i}}{=} a_j\,.$$

Also gilt $f = \sum_{i=0}^n \varphi_i(f)\cdot X^i$.

c) Für jedes $f \in V$ gilt

$$\lambda(f) \overset{b)}{=} \lambda(\sum_{i=0}^n \varphi_i(f)\cdot X^i) \overset{\lambda \text{ ist linear}}{=} \sum_{i=0}^n \varphi_i(f)\cdot\lambda(X^i) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(f)\cdot t^i = (\sum_{i=0}^n t^i\cdot\varphi_i)(f)\,.$$

Somit gilt $\lambda = \sum_{i=0}^n t^i \varphi_i$.

Aufgabe I.5

Lösung: a) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A_b:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CP}_{A_b}(\lambda) &= -\det(A_b - \lambda I_3) = -\begin{vmatrix} b-\lambda & b-1 & 0 \\ -3 & -2-\lambda & 0 \\ b+1 & b-1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{entw. nach} \\ \text{3. Spalte}}}{=} (\lambda+1)\begin{vmatrix} b-\lambda & b-1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & b-1 \\ -1+\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & b-1 \\ 0 & b-3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-(b-3))
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind damit $1, -1$ und $b-3$.

Für $b \notin \{2,4\}$ hat A_b also drei verschiedene Eigenwerte und ist folglich diagonalisierbar.

Für $b = 2$ ist -1 doppelter Eigenwert. Wir berechnen den zugehörigen Eigenraum:

$$\mathrm{Eig}(A_2, -1) = \mathrm{Kern}(A_2 + I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Da der Eigenraum 2-dimensional ist, ist auch A_2 diagonalisierbar.

Für $b = 4$ ist 1 doppelter Eigenwert. Wir berechnen den zugehörigen Eigenraum für allgemeines b, da wir ihn im b)-Teil auch für $b = 2$ benötigen:

$$\mathrm{Eig}(A_b, 1) = \mathrm{Kern}(A_b - I_3) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} b-1 & b-1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ b+1 & b-1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \mid \div(-3) \quad \cdot(-b+1) \quad \cdot(-b-1) \\ + \end{array}$$

$$= \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \mid \div(-2) \ \cdot(-1) \end{matrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Da der Eigenraum nur eindimensional ist, ist A_4 nicht diagonalisierbar.

b) Aus Teil a) kennen wir bereits alle Eigenräume von A_2. Daher können wir S und D direkt angeben:
Für $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}A_2 S = D$.

Aufgabe I.6

a) Wir haben $\det(A_1) = x_1$ und $\det(A_2) = \det\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{smallmatrix}\right) = x_1(x_2 - x_1)$. Weiter gilt:

$$\det(A_3) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$
$$= x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_1 - x_2 + x_1) = x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Dabei haben wir zunächst die erste Zeile von der zweiten und dritten abgezogen und dann nach der ersten Spalte entwickelt.

b) Allgemein hat A_n die Form

$$A_n = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ \vdots & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\det(A_n) = x_1 \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

und beweisen dies durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Der wurde in a) erledigt, $\det(A_1) = x_1$.

Induktionsvoraussetzung: Es gilt

$$\det(A_{n-1}) = x_1 \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Induktionsschritt: Wir berechnen die Determinante von A_n, indem wir die vorletzte Zeile von der letzten abziehen (der Stern steht dabei für die ersten $n-1$ Einträge der letzten Spalte, die 0 steht für $n-1$ Nullen in der letzten Zeile) und dann nach der letzten Zeile entwickeln:

$$\det(A_n) = \det(\begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ 0 & (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix})$$
$$= (x_n - x_{n-1}) \cdot \det(A_{n-1})$$
$$= x_1 \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

wie behauptet.

Lösungen Lineare Algebra II

Aufgabe II.1

a) Die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert 0 ist die Dimension des Eigenraums, also die Dimension des Kerns von A, also nach der Dimensionsformel $5 - \mathrm{Rang}(A) = 2$.

b) Da wir im Komplexen sind, gilt $\mathrm{Spur}(A) = \sum_\lambda \dim(H(A,\lambda))\lambda$. Die Summe läuft hierbei über die Eigenwerte von A, und $H(A,\lambda)$ ist der Hauptraum zum Eigenwert λ. Wäre 0 der einzige Eigenwert, so wäre die Summe rechter Hand 0. Die Spur von A ist jedoch 3, also gibt es einen Eigenwert ungleich 0.

c) Wegen a) und b) besitzt A genau zwei Eigenwerte: 0 und einen weiteren, er heiße λ.

Da es zum Eigenwert 0 genau zwei Jordankästchen gibt, hat der Hauptraum zum Eigenwert 0 Dimension ≥ 2. Also hat der Hauptraum zum Eigenwert λ Dimension ≤ 3. Andererseits ist die Dimension mindestens 1, also liegt die Dimension des Hauptraums zu λ zwischen 1 und 3. Diese Werte können alle angenommen werden, wie Teil d) zeigen wird.

d) Wir gehen die verschiedenen Möglichkeiten durch, die es für $\mu := \dim(H(A,\lambda))$ gibt. Nach der Formel für die Spur aus Teil b) gilt $\mu \cdot \lambda = 3$.

Fall 1: $\mu = 1$. Hier ist $\lambda = 3$. Der Jordanblock zum Eigenwert 0 hat Länge vier und zwei Jordankästchen. Zwei Möglichkeiten:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Fall 2: $\mu = 2$. Hier ist $\lambda = 3/2$. Der Jordanblock zum Eigenwert 0 hat Länge drei und zwei Jordankästchen. Es könnte zwei Jordankästchen zum Eigenwert $3/2$ geben. Zwei Möglichkeiten:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \frac{3}{2} & 0 \\ & & & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \frac{3}{2} & \\ & & & & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Fall 3: $\mu = 3$. Hier ist $\lambda = 1$. Der Jordanblock zum Eigenwert 0 hat Länge zwei und zwei Jordankästchen. Es kann ein, zwei oder drei Kästchen zum Eigenwert 1 geben. Drei Möglichkeiten:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe II.2

a) Jede Matrix $F \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$. Diese ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn F symmetrisch und positiv definit ist.

Die gegebene Matrix $F_{a,b}$ ist genau dann symmetrisch, wenn $b = 1$ ist.

Außerdem ist $F_{a,1}$ genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv definit sind. Wir bestimmen also zunächst die Hauptminoren:

- $\det((1)) = 1 > 0$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 > 0$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = 2(a-1) > 0 \Leftrightarrow a > 1$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
  $= 2 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (4(a-1) - 4) = 8(a-2) > 0 \Leftrightarrow a > 2$

Also ist $F_{a,1}$ genau dann positiv definit, wenn $a > 2$ ist.

b) Wir wählen die Standardbasis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$ und orthogonalisieren diese mit Hilfe des Verfahrens von E. Schmidt bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

- b_1 hat Norm 1, kann also als erster Vektor a_1 gewählt werden.
- $\langle b_2, a_1 \rangle = b_2^\top \cdot F_{3,1} \cdot a_1 = 0$ und $\|b_2\| = 2$, also können wir als zweiten Vektor $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_2$ wählen.
- $\langle b_3, a_1 \rangle = b_3^\top \cdot F_{3,1} \cdot a_1 = 1$ und $\langle b_3, a_2 \rangle = b_3^\top \cdot F_{3,1} \cdot a_2 = 0$, also ist $\tilde{a_3} = b_3 - 1 \cdot a_1 - 0 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal zu a_1 und a_2. Es ist $\|\tilde{a_3}\| = 2$ und wir können als dritten Vektor $a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{a_3}$ wählen.
- $\langle b_4, a_1 \rangle = b_4^\top \cdot F_{3,1} \cdot a_1 = 0$, $\langle b_4, a_2 \rangle = b_4^\top \cdot F_{3,1} \cdot a_2 = 0$ und $\langle b_4, a_3 \rangle = b_4^\top \cdot F_{3,1} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2$, also ist $\tilde{a_4} = b_4 - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot a_3 = b_4 - \tilde{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zu a_1, a_2 und a_3. Es ist $\|\tilde{a_4}\| = 2$ und wir können als vierten Vektor $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{a_4}$ wählen.

Also ist $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Skalarprodukts, das von $F_{3,1}$ definiert wird.

Aufgabe II.3

a) Der Vektor $v_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist offensichtlich ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Der eindimensionale Untervektorraum $\langle v_1 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ ist somit Φ-invariant, sein orthogonales Komplement $\langle v_1 \rangle^\perp$ demnach auch. Da Φ Determinante -1 hat, muss seine Einschränkung auf $\langle v_1 \rangle^\perp$ Determinante 1 haben, also eine Drehung sein. Es reicht also, v_1 zu einer orthogonalen Basis zu ergänzen und diese dann zu normieren, um eine Basis B zu erhalten, bezüglich der $D_{BB}(\Phi)$ in Isometrie-Normalform steht.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und } v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine orthogonale Basis, die wir noch normieren: Setze

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot v_1,\ b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_2,\ b_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot v_3,$$

dann ist $B := (b_1, b_2, b_3)$ eine ONB, bezüglich der $D_{BB}(\Phi)$ in Isometrie-Normalform steht.

b) Wir nutzen die Linearität von Φ aus:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus Teil a) haben wir gelernt, dass gilt $\Phi(b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \in \langle \{b_2, b_3\} \rangle$. Da b_2, b_3 orthogonal und normiert sind, gilt $\Phi(b_2) = b_2^\top \cdot \Phi(b_2) \cdot b_2 + b_3^\top \cdot \Phi(b_2) \cdot b_3 = \frac{1}{2} b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} b_3$.

Da nach a) $D_{BB}(\Phi)$ in Isometrienormalform vorliegt, gilt

$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.4

a) Aus der Abbildungsvorschrift können wir ablesen, dass Bild Φ im von $w_2 \neq 0$ erzeugten Vektorraum enthalten ist. Außerdem ist wegen $\langle w_2, w_1 \rangle \neq 0$ ein Vektor $\neq 0$ im Bild enthalten. Damit ist Bild $\Phi = \langle w_2 \rangle$ und es gilt $\operatorname{Rang} \Phi = \dim(\text{Bild}\, \Phi) = 1$.

b) Da $\dim(\operatorname{Kern} \Phi) = \dim(V) - \operatorname{Rang} \Phi = n - 1 > 0$ gilt, ist 0 ein $(n-1)$-facher Eigenwert von Φ. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist der Kern von Φ, also $w_1^\perp$.

Weiter ist $\Phi(w_2) = \langle w_2, w_1 \rangle \cdot w_2$ und damit $\langle w_2, w_1 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ ein Eigenwert von Φ. Dieser ist nach Voraussetzung nicht 0. Sein Eigenraum ist eindimensional und wird von w_2 erzeugt.

Aus Dimensionsgründen gibt es keine weiteren Eigenwerte.

Also ist $\operatorname{Eig}_0(\Phi) = w_1^\perp$ und $\operatorname{Eig}_{\langle w_2, w_1 \rangle}(\Phi) = \langle w_2 \rangle$.

c) Für $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\langle v_1, \Phi(v_2) \rangle = \langle v_1, \langle v_2, w_1 \rangle \cdot w_2 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle \cdot \langle v_1, w_2 \rangle = \langle v_2, w_1 \cdot \langle v_1, w_2 \rangle \rangle = \langle \langle v_1, w_2 \rangle \cdot w_1, v_2 \rangle.$$

Definieren wir nun $\tilde{\Phi} \colon V \longrightarrow V,\ \tilde{\Phi}(v) = \langle v, w_2 \rangle \cdot w_1$, so gilt wegen der obigen Rechnung $\langle v_1, \Phi(v_2) \rangle = \langle \tilde{\Phi}(v_1), v_2 \rangle$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und wegen der Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung ist damit $\tilde{\Phi} = \Phi^*$.

d) Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle v, w_1 \rangle \cdot w_2 = \langle v, w_2 \rangle \cdot w_1$ für alle $v \in V$ gilt.

Ist Φ selbstadjungiert, dann müssen w_1 und w_2 Vielfache voneinander sein, genauer $w_1 = \frac{\langle w_1, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_2 \rangle} \cdot w_2$, also linear abhängig.

Gilt umgekehrt $w_1 = \lambda \cdot w_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\langle v, w_1 \rangle \cdot w_2 = \lambda \cdot \langle v, w_2 \rangle \cdot w_2 = \langle v, w_2 \rangle \cdot w_1$, also ist Φ selbstadjungiert.

Aufgabe II.5

a) Wir nehmen an, $\lambda \in \mathbb{R}$ sei ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt mit dem Standardskalarprodukt

$$\lambda\langle v, v\rangle = \lambda v^\top \cdot v = (Av)^\top \cdot v = v^\top \cdot A^\top \cdot v = -(v^\top Av) = -(v^\top \cdot \lambda v) = -\lambda(v^\top \cdot v).$$

Da v nicht der Nullvektor ist, muss demnach $\lambda = 0$ gelten, was aber nicht sein kann, da A regulär ist.

Da ein reelles Polynom ungeraden Grades stets eine reelle Nullstelle hat, hat das charakteristische Polynom von A also geraden Grad und damit ist n gerade.

(Alternativ hierzu: Wäre n ungerade, so wäre

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$

also $\det(A) = 0$. Da A aber regulär ist, ist das nicht möglich.)

b) Die Multiplikation mit A ist ein normaler Endomorphismus des euklidischen Standardraums, da $A^\top \cdot A = -A^2 = A \cdot A^\top$ gilt und $A^\top$ den zu A adjungierten Endomorphismus beschreibt.

Der Satz über die euklidische Normalform eines normalen Endomorphismus sagt dann insbesondere, dass es eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass $S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix mit Matrizen der Größe 2×2 auf der Diagonalen ist, da es ja keine reellen Eigenwerte von A gibt. Wir nennen diese Matrizen auf der Diagonalen $M_1, \ldots, M_{n/2}$. Wegen $S^{-1} = S^\top$ gilt

$$(S^{-1}AS)^\top = S^\top A^\top (S^{-1})^\top = S^{-1}(-A)S,$$

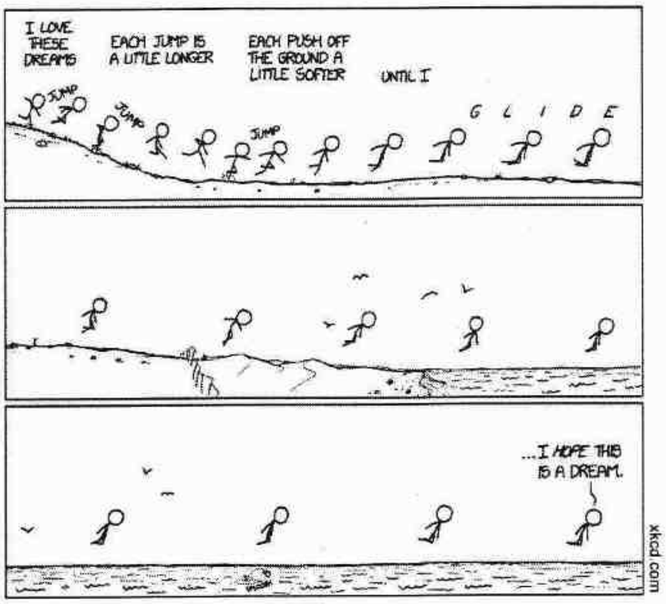
also sind auch die M_i antisymmetrisch und damit von der Form

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & -c_i \\ c_i & 0 \end{pmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

c) Das charakteristische Polynom von A ist gleich dem von $S^{-1}AS$, also gleich

$$\prod_{i=1}^{n/2} (X^2 - c_i^2).$$

Die c_i sind also durch das charakteristische Polynom von A – und damit durch A – bis auf Reihenfolge und Vorzeichen festgelegt.



Aufgabe II.6

Für einen Richtungsvektor wie in der Aufgabenstellung ist der allgemeine Punkt auf der Geraden von der Form

$$\begin{pmatrix} 1+tu \\ y+tv \\ z+t \end{pmatrix}.$$

Da P auf H liegt, gilt $1+y^2-z^2=1$ (*), also $|y|=|z|$. Wir testen, für welche Wahlen von r der allgemeine Punkt ebenfalls zu H gehört. Dies ist genau dann der Fall, wenn folgendes gilt:

$$(1+tu)^2+(y+tv)^2-(z+t)^2=1.$$

Auflösen der Klammern führt wegen (*) zu

$$(2u+2yv-2z)t+(u^2+v^2-1)t^2=0.$$

Dies gilt genau dann für <u>jedes</u> $t \in \mathbb{R}$, wenn

$$2u+2yv-2z=0 \quad \text{und} \quad u^2+v^2-1=0.$$

Die erste Bedingung können wir nach u auflösen:

$$u=z-yv.$$

Setzen wir dies in die zweite Bedingung ein, so resultiert

$$z^2-1-2zyv+(y^2+1)v^2=0.$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert dann

$$v=\frac{2zy \pm \sqrt{4z^2y^2-4(z^2-1)(y^2+1)}}{2(y^2+1)}=\frac{2zy \pm \sqrt{4(1+y^2-z^2)}}{2(y^2+1)}=\frac{zy \pm 1}{y^2+1}.$$

Das gibt 2 mögliche Werte von v, für die die Bedingung erfüllt ist. Das oben festgelegte u ergibt sich eindeutig aus der Wahl von v und damit gibt es tatsächlich zwei Wahlen für das Paar (u,v) sodass die Gerade aus der Aufgabenstellung ganz in H liegt.