17.03.2016

Schmidt/Tuschmann

Lineare Algebra I, WS15/16 Haupt

Aufgabe I.1

Es seien

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$$

und

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\} .$$

Zeigen Sie:

(a) G ist bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(b) Die Abbildung

$$\phi : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\} , \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit $\operatorname{Kern} \phi = N$.

Aufgabe I.2

Es seien V ein reeller Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ und $x_1, \dots, x_n \in V$ paarweise verschiedene Vektoren.

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $B = \{x_i + x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ denselben Untervektorraum von V erzeugen.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Die Mengen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{x_i - x_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ erzeugen denselben Untervektorraum von V.

Aufgabe I.3

Es sei die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x$$

gegeben.

Bestimmen Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis $\mathcal{C}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass Φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Aufgabe I.4

Es seien K ein Körper und $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in K\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $b_1 = 1$, $b_2 = x$ und $b_3 = x^2$. Weiter sei V^* der Dualraum von V mit dualer Basis $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in K$ die Abbildung $\lambda_\alpha \colon V \to K,\ f \mapsto f(\alpha)$ ein Element des Dualraums V^* ist.

(b) Stellen Sie λ_α als Linearkombination von b_1^*, b_2^* und b_3^* dar.

(c) Zeigen Sie, dass $\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma\}$ für paarweise verschiedene $\alpha, \beta, \gamma \in K$ eine Basis von V^* ist.

Aufgabe I.5

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Im Vektorraum $K^{n \times n}$ bilden die Elementarmatrizen E_{ij}, welche genau an der Stelle (i, j) eine 1 und ansonsten nur 0 als Einträge haben, eine Basis.

Es seien $A, B \in K^{n \times n}$ und damit die lineare Abbildung

$$\Phi : K^{n \times n} \longrightarrow K^{n \times n}, \ X \longmapsto AXB$$

gegeben.

Zeigen Sie:

(a) Sind A und B Diagonalmatrizen, so bilden die Elementarmatrizen eine Basis aus Eigenvektoren von Φ.

(b) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch Φ diagonalisierbar.

Aufgabe I.6

Es sei für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\det A_n = \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{n(n+1)}{2}x\right)$ gilt.

Lösung A1

Zu (a): Es gilt $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, denn jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$ erfüllt $0 \neq ac = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Offensichtlich enthält G die Einheitsmatrix, ist also nicht leer. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in G$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} cd & ce - bf \\ 0 & af \end{pmatrix} \in G$$

denn $\frac{(cd)(af)}{(ac)^2} = \frac{df}{ac} \neq 0$. Somit ist G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Zu (b): Die Abbildung ϕ ist surjektiv, da für jedes $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ in G liegt und $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = r$ erfüllt.

Da $\det(AB) = \det A \det B$ gilt, ist ϕ ein Homomorphismus.

Offensichtlich ist die Menge N in $\operatorname{Kern} \phi$ enthalten. Andererseits folgt für jede Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} \phi$ aus $1 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = ac$, dass $c = a^{-1}$ und damit $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in N$ gilt. $\square$

Lösung A2

Zu (a): Offensichtlich gilt $[B] \subseteq [A]$. Umgekehrt sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $n \geq 3$ gibt es $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass i, j, k paarweise verschieden sind. Es folgt

$$x_i = \frac{1}{2}(x_i + x_j) + \frac{1}{2}(x_i + x_k) - \frac{1}{2}(x_j + x_k) \in [B] .$$

Damit gilt auch $[A] \subseteq [B]$.

Zu (a): Die von den angegebenen Mengen erzeugten Unterräume sind im Allgemeinen nicht gleich, denn setzt man $V = \mathbb{R}^2$ sowie

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$[x_1, x_2, x_3] = \mathbb{R}^2$$

aber

$$[x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_3] = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] \neq \mathbb{R}^2 .$$

$\square$

Lösung A3

Wählt man

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } c_1 = \Phi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } c_2 = \Phi(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

so bildet $C = (c_1, c_2, c_3)$ mit $c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ denn

$$\det(c_1, c_2, c_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 1(12 - 2) = 10 \neq 0\,.$$

Mit dem Gauß-Algorithmus errechnet man eine Basis $\left\{ b_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ von Kern Φ.

Dann besitzt Φ bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ und $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ die geforderte Abbildungsmatrix. □

Lösung A4

Zu (a): Es sei $\alpha \in K$. Für Polynome $p = ax^2 + bx + c$, $q = dx^2 + ex + f$ und $\delta \in K$ gilt:

$$\lambda_\alpha(\delta p + q) = (\delta p + q)(\alpha) = \delta(a\alpha^2 + b\alpha + c) + d\alpha^2 + e\alpha + f = \delta\lambda_\alpha(p) + \lambda_\alpha(q)$$

Zu (b): Für $p = ax^2 + bx + c$ folgt aus $b_1^*(f) = c$, $b_2^*(f) = b$ und $b_3^*(f) = a$

$$\lambda_\alpha(f) = a\alpha^2 + b\alpha + c = b_3^*(f)\alpha^2 + b_2^*(f)\alpha + b_1^*(f) = (\alpha^2 b_3^* + \alpha b_2^* + b_1^*)(f)$$

also gilt $\lambda_\alpha = \alpha^2 b_3^* + \alpha b_2^* + b_1^*$.

Zu (c): Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Nach (b) haben λ_α, λ_β und λ_γ bezüglich der Basis b_1^*, b_2^*, b_3^* die Koeffizientenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$. Sind α, β und γ paarweise verschieden, so sind wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) \neq 0$$

die Koeffizientenvektoren und damit λ_α, λ_β und λ_γ linear unabhängig. Diese bilden eine Basis von V^*, da $\dim V^* = \dim V = 3$ gilt. □

Lösung A5

Zu (a): Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Da $\Phi(E_{ij}) = AE_{ij}B = \alpha_i\beta_j E_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, ist die aus den Elementarmatrizen bestehende Basis B eine Eigenbasis und damit Φ diagonalisierbar.

Zu (b): A und B sind genau dann diagonalisierbar, wenn reguläre Matrizen $T, S \in K^{n\times n}$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\alpha}_n \end{pmatrix} = \overline{A} \quad \text{und} \quad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\beta}_n \end{pmatrix} = \overline{B} \qquad .$$

existieren.

Nach (a) gilt $\overline{A}E_{ij}\overline{B} = \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j E_{ij}$, also $T^{-1}ATE_{ij}S^{-1}BS = \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j E_{ij}$ und somit $ATE_{ij}S^{-1}B = \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j TE_{ij}S^{-1}$ für alle $i, j \in \{1, \dots n\}$. Damit wären die n^2 Vektoren $F_{ij} = TE_{ij}S^{-1}$ Eigenvektoren, falls $F_{ij} \neq 0$ gilt.

Wir zeigen, dass die Vektoren F_{ij} sogar linear unabhängig sind: Es gilt genau dann

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}F_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}TE_{ij}S^{-1} = T(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij})S^{-1},$$

wenn

$$0 = T^{-1}0S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij}$$

gilt. Da die Vektoren E_{ij} linear unabhängig sind, folgt daraus $\lambda_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, also die lineare Unabhängigkeit der F_{ij}.

Somit bilden die $n^2 = \dim K^{n\times n}$ Vektoren F_{ij} eine Basis aus Eigenvektoren von Φ und Φ ist diagonalisierbar. □

Lösung A6

Mit $\det\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & x+1\end{pmatrix} = x+1 = \frac{1}{1!}(1+\frac{1(1+1)}{2}x)$ ist der Induktionsanfang gezeigt.

Subtrahiert man in A_{n+1} die vorletzte Zeile von der letzten und entwickelt nach der letzten Zeile, so gilt unter der Induktionsannahme $\det A_n = \frac{1}{n!}\left(1+\frac{n(n+1)}{2}x\right)$:

$$
\begin{aligned}
\det A_{n+1} &= \det\begin{pmatrix}
1 & x & x & \cdots & x & x & x\\
0 & x+1 & x & \cdots & x & x & x\\
0 & x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x & x & x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n-1} & x & x\\
0 & x & x & \cdots & x & x+\frac{1}{n} & x\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix}\\
&= (-1)^{2n+4}\frac{1}{n+1}\det A_n + (-1)^{2n+3}\left(-\frac{1}{n}\right)\det\begin{pmatrix}
1 & x & x & \cdots & x & x\\
0 & x+1 & x & \cdots & x & x\\
0 & x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x & x\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n-1} & x\\
0 & x & x & \cdots & x & x
\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{n+1}\det A_n + \frac{1}{n}\det\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0\\
0 & x & x & \cdots & x & x
\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{n(n+1)}{2}x\right) + \frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}x\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{n(n+1)}{2}x\right) + \frac{1}{n!}x\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{n(n+1)}{2}x + \frac{2(n+1)}{2}x\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}x\right)
\end{aligned}
$$

□