Leuzinger
Lineare Algebra I

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.

Aufgabe I.1

Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_x := \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \\ -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gegeben und es sei $G = \{A_x \mid x \neq 0\}$.

Zeigen Sie:

(a) $(G, *)$ ist eine abelsche Gruppe, wobei $*$ die übliche Matrixmultiplikation bezeichnet.

(b) Die Menge $H = \{A_x \mid x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0\}$ ist eine Untergruppe von G.

(c) $(G, *)$ ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe I.2

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix} \right], \quad W = \left[\begin{pmatrix} 1\\2\\1\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\4\\6 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie für jeden der Vektorräume U, W, $U \cap W$ und $U + W$ eine Basis und seine Dimension.

Aufgabe I.3

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung

$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad x = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 4x_4 + 5x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_4 - 6x_5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die Φ_α surjektiv ist.

(b) Begründen Sie, ob es Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, für die Φ_α injektiv ist.

(c) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\Phi_\alpha)$.

Aufgabe I.4

Für einen (nicht notwendigerweise endlich dimensionalen) Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$ seien zwei Untervektorräume U_1 und U_2 gegeben mit $U_1 \subseteq U_2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : V/U_1 \to V/U_2, \quad u + U_1 \mapsto u + U_2$$

ein surjektiver Vektorraum-Homomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern von Φ.

(c) Zeigen Sie, dass der Faktorraum $(V/U_1)/(U_2/U_1)$ isomorph zu V/U_2 ist.

Aufgabe I.5

Es seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Hat A den Eigenwert $\lambda = -2$, so ist $A^2 + 2A$ nicht invertierbar.

(b) Besitzt B paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und gilt für den Eigenraum E_{λ_1} zum Eigenwert λ_1

$$\dim(E_{\lambda_1}) = n - r + 1,$$

so ist B diagonalisierbar.

Aufgabe I.6

Es seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $\mathbb{K}$ ein Körper, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und

$$A_n := \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \ddots & & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \cdots & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

(a) Zeigen Sie dass die Determinante von A_n gegeben ist durch die Formel

$$\det(A_n) = (\beta - \alpha)^{n-1}(\beta + (n-1)\alpha).$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix B_n.

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag

(a) Zunächst berechnen wir für $A_x, A_y \in G$

$$\begin{aligned} A_x * A_y &= \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \\ -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y}{2} & -\frac{y}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{y}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{xy}{4} + \frac{xy}{4} & -\frac{xy}{4} - \frac{xy}{4} \\ -\frac{xy}{4} - \frac{xy}{4} & \frac{xy}{4} + \frac{xy}{4} \end{pmatrix} = A_{x \cdot y}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Da aus $x, y \neq 0$ auch $x \cdot y \neq 0$ folgt, ist „$*$" eine Verknüpfung auf G.

Wegen $A_x * A_y = A_{x \cdot y} = A_{y \cdot x} = A_y * A_x$ ist „$*$" kommutativ; die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation.

Die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in G$ ist neutrales Element von G, denn für $A_x \in G$ beliebig gilt nach $(*)$

$$A_x * A_1 = A_{x \cdot 1} = A_x.$$

Sei nun $A_x \in G$ ein beliebiges Element von G. Dann existiert wegen $x \neq 0$ auch $x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und dank der Gleichung

$$A_x * A_{x^{-1}} = A_{x \cdot x^{-1}} = A_1$$

sehen wir, dass das Element $A_{x^{-1}} \in G$ das Inverse zu A_x ist.

Insgesamt ist $(G, *)$ also eine abelsche Gruppe.

(b) Um zu zeigen, dass H eine Untergruppe ist, wenden wir das Untergruppenkriterium an.

Zunächst ist wegen $1 \in \mathbb{Q}$ das neutrale Element A_1 von G in H enthalten, also insbesondere $H \neq \emptyset$. Weiter gilt für beliebige $A_x, A_y \in H$

$$A_x * (A_y)^{-1} = A_x * A_{y^{-1}} = A_{x \cdot y^{-1}}.$$

Da mit $x, y \in \mathbb{Q}$ auch das Produkt $x \cdot y^{-1}$ in $\mathbb{Q}$ liegt, folgt $A_x * (A_y)^{-1} \in H$.

(c) Wir betrachten dazu die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to G,\ x \mapsto A_x$. Es gilt wegen $(*)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Phi(x \cdot y) = A_{x \cdot y} = A_x * A_y = \Phi(x) * \Phi(y),$$

das heißt Φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Weiter ist Φ surjektiv, denn zu jedem $A_x \in G$ gibt es ein Urbild, nämlich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Φ ist auch injektiv, denn $\Phi(x) = \Phi(y)$ ist äquivalent zu $A_x = A_y$, was nur für $x = y$ möglich ist.

Insgesamt ist Φ also ein Isomorphismus und damit sind die Gruppen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(G, *)$ isomorph.

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag

Um eine Basis von U zu bestimmen, schreiben wir die erzeugenden Vektoren als Zeilen einer Matrix, die wir mit dem Gauß Algorithmus vereinfachen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\dim(U) = 2$ und eine Basis von U ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit dem Untervektorraum W verfahren wir genauso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\dim(W) = 3$ und eine Basis von W ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Dimension der Summe $U + W$ ist kleiner gleich 4 und größer gleich $\dim(W) = 3$. Da der Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in U liegt, aber nicht in W, muss $\dim(U + W) = 4$ gelten und damit $U + W = \mathbb{R}^4$. Insbesondere ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ eine Basis von $U + W$.

Nach dem Dimensionssatz für Untervektorräume gilt $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 3 - 4 = 1$; es genügt also, einen Vektor zu finden, der zugleich in U und W liegt. Ein solcher Vektor ist zum Beispiel der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $U \cap W$ ist damit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Schnitt zweier Untervektorräume U und W mit Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_l\}$ wird allgemein mit Hilfe des Ansatzes

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{j=1}^{l} \mu_j c_j \qquad (*)$$

berechnet. Der Ansatz $(*)$ führt auf ein homogenes lineares Gleichungssystem für die $n + l$ Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_l$; nach Bestimmen der Lösungsmenge erhält man alle möglichen Vektoren $v \in U \cap W$ dann aus einer der beiden Gleichung in $(*)$.

Zum Abschluss noch eine Bemerkung der Korrekteure: Eine Basis des Schnittes erhält man im Allgemeinen nicht als Summe der Basisvektoren! Und es ist nicht korrekt, wenn als Basis die lineare Hülle verschiedener Vektoren angegeben wird. Die Angabe der Dimension einer *Basis* macht keinen Sinn.

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag

(a) Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn ihr Rang gleich der Dimension des Zielraumes ist. Wir berechnen also mit der Abbildungsmatrix

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

der linearen Abbildung Φ_α bezüglich der Standardbasen

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang}(\Phi_\alpha) = \operatorname{Rang}(B_\alpha) &= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & -11 \\ 0 & -1 & \alpha & \alpha^2+4 & -11 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1) \\ &= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 12 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \alpha^2-4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun gilt für $\alpha \neq 2$ $\operatorname{Rang}(\Phi_\alpha) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; für $\alpha = 2$ ist die letzte Zeile der obigen Matrix eine Nullzeile, das heißt $\operatorname{Rang}(\Phi_2) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$. Die lineare Abbildung Φ_α ist also genau dann surjektiv, wenn $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) Gemäß dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen muss die Gleichung

$$5 = \dim(\mathbb{R}^5) = \dim \operatorname{Kern}(\Phi_\alpha) + \operatorname{Rang}(\Phi_\alpha)$$

erfüllt sein. Wegen $\operatorname{Rang}(\Phi_\alpha) \leq 3$ folgt also $\dim \operatorname{Kern}(\Phi_\alpha) \geq 2$. Somit ist Φ_α für keinen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ injektiv.

(c) Für die Bestimmung einer Basis von $\operatorname{Kern}(\Phi_\alpha)$ können wir von der in Teil (a) vereinfachten Matrix ausgehen, da nur Zeilenumformungen für die Rangbestimmung verwendet wurden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 12 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \alpha^2-4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha \neq 2$ folgt weiter wegen $\alpha^2 - 4 = (\alpha-2)(\alpha+2)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 12 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \alpha^2-4 & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 12 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4-4\alpha & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha-4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

das heißt

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4-4\alpha \\ 2\alpha-4 \\ \alpha+2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von $\operatorname{Kern}(\Phi_\alpha)$.

Für $\alpha = 2$ erhalten wir aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 12 & -17 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als Basis von $\operatorname{Kern}(\Phi_2)$ die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag

(a) Zunächst müssen wir zeigen, dass die Abbildung Φ wohldefiniert ist. Seien also $u, u' \in V$ sodass $u + U_1 = u' + U_1$ in V/U_1. Insbesondere gilt $u - u' \in U_1$. Wegen $U_1 \subseteq U_2$ folgt $u - u' \in U_2$, das heißt

$$\Phi(u + U_1) = u + U_2 = u' + U_2 = \Phi(u' + U_1).$$

Die Abbildung Φ ist linear, denn für $u + U_1, u' + U_1 \in V/U_1$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi((u + U_1) + (u' + U_1)) &= \Phi(u + u' + U_1) = u + u' + U_2 \\ &= (u + U_2) + (u' + U_2) = \Phi(u + U_1) + \Phi(u' + U_1), \\ \Phi(\alpha(u + U_1)) &= \Phi(\alpha u + U_1) = \alpha u + U_2 = \alpha(u + U_2) = \alpha\Phi(u + U_1).\end{aligned}$$

Weiter ist Φ surjektiv, denn für einen beliebigen Vektor $u + U_2 \in V/U_2$ ist der Vektor $u + U_1 \in V/U_1$ ein Urbild unter Φ.

(b) Der Kern von Φ besteht aus allen Vektoren $u + U_1 \in V/U_1$, die unter Φ auf den Nullvektor $0 + U_2 = U_2 \in V/U_2$ abgebildet werden. Die Gleichung

$$U_2 = \Phi(u + U_1) = u + U_2$$

ist aber äquivalent zu $u \in U_2$, das heißt

$$\text{Kern}(\Phi) = \{u + U_1 \mid u \in U_2\} = U_2/U_1.$$

(c) Nach dem Homomorphiesatz für lineare Abbildungen ist für eine lineare Abbildung $\Psi : V' \to W$ der Faktorraum $V'/\text{Kern}(\Psi)$ isomorph zum Untervektorraum $\text{Bild}(\Psi)$ von W. Die Aussage folgt also mit $\Psi = \Phi$, $V' = V/U_1$ und $W = V/U_2$ aus Teil (a) und (b).

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag

(a) Es sei $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = -2$, das heißt

$$A \cdot x = -2x.$$

Wegen

$$(A^2 + 2A) \cdot x = A \cdot \underbrace{A \cdot x}_{=-2x} + 2\underbrace{A \cdot x}_{=-2x} = -2\underbrace{A \cdot x}_{=-2x} - 4x = 0 = 0 \cdot x$$

ist damit x auch Eigenvektor der Matrix $A^2 + 2A$ zum Eigenwert 0. Es folgt $\text{Rang}(A^2 + 2A) = \text{Rang}(A^2 + 2A - 0 \cdot E_n) < n$ und damit ist die Matrix $A^2 + 2A$ nicht invertierbar.

Eine kürzere alternative Lösung lautet wie folgt:

Da -2 Eigenwert von A ist gilt $\det(A + 2E_n) = 0$. Es folgt mit dem Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(A^2 + 2A) = \det(A \cdot (A + 2E_n)) = \det(A) \cdot \det(A + 2E_n) = 0,$$

das heißt $A^2 + 2A$ ist nicht invertierbar.

(b) Nach einem Satz der Vorlesung ist eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume von B gleich n ist. Wegen $\dim(E_{\lambda_i}) \geq 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots r\}$ folgt

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) \geq n - r + 1 + \sum_{i=2}^{r} 1 = n - r + 1 + (r - 1) = n.$$

Da die Summe der Eigenräume stets direkt und ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ ist, muss in der obigen Ungleichung Gleichheit gelten. Somit ist B diagonalisierbar.

Zum Schluss noch eine Bemerkung der Korrekteure: r paarweise verschiedene Eigenwerte zu haben bedeutet im Allgemeinen nicht, dass das charakteristische Polynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Dies trifft nur im Spezialfall $r = n$ zu.

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag

(a) Wir machen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Für $n = 2$ gilt

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - \alpha^2 = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = (\beta-\alpha)^{n-1}(\beta+(n-1)\alpha),$$

das heißt der Induktionsanfang ist gemacht.

Als Induktionsvoraussetzung verankern wir, dass für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$

$$\det(A_{n-1}) = (\beta-\alpha)^{n-1-1}(\beta+(n-1-1)\alpha)$$

gilt.

Den Induktionsschritt $n-1 \rightsquigarrow n$ machen wir wie folgt:

Zieht man die letzten Zeile von allen anderen von A_n ab, so folgt

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} \beta-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & \ddots & \vdots & \alpha-\beta \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ \alpha & \cdots & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned}\det(A_n) = (\beta-\alpha) &\begin{vmatrix} \beta-\alpha & 0 & \ddots & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} \\ + (-1)^{n-1}\alpha &\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta \\ \beta-\alpha & 0 & \ddots & \vdots & \alpha-\beta \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Addiert man in der ersten Matrix die letzte Zeile zu allen anderen, so erhält man die Matrix A_{n-1}; die Determinante der zweiten Matrix berechnen wir mittels Entwicklung nach der letzten Spalte zu

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta \\ \beta-\alpha & 0 & \ddots & \vdots & \alpha-\beta \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1+1}(\alpha-\beta)\underbrace{\begin{vmatrix} \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \end{vmatrix}}_{(\beta-\alpha)^{n-2}} \\ &= (-1)^{n-1}(\beta-\alpha)^{n-1}.\end{aligned}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir also

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= (\beta-\alpha)\det(A_{n-1}) + (-1)^{n-1}\alpha(-1)^{n-1}(\beta-\alpha)^{n-1} \\ &= (\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^{n-1-1}(\beta+(n-1-1)\alpha) + \alpha(\beta-\alpha)^{n-1} \\ &= (\beta-\alpha)^{n-1}(\beta+(n-1-1)\alpha+\alpha) \\ &= (\beta-\alpha)^{n-1}(\beta+(n-1)\alpha),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Die Matrix B_n entsteht aus der Matrix A_n durch Einsetzen von $\alpha = 1$ und $\beta = 0$. Aus Teil (a) folgt also

$$\det(B_n) = (0-1)^{n-1}(0+(n-1)1) = (-1)^{n-1}(n-1).$$