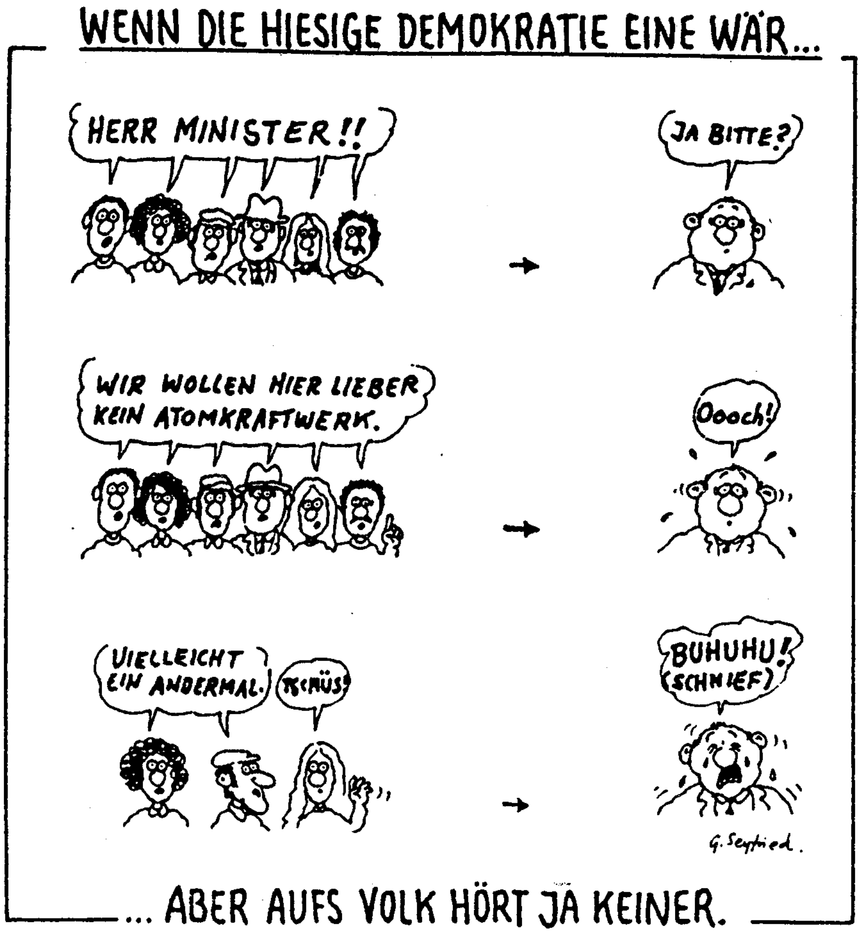
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie


F.Herrlich W.Trinks
Mathematisches Institut II


Funktionenalgebra
Skalarprod
Bilinearf.
Abstand
affin R

UG
UVR
Isomorph
Abbild. Mat.
Basen
Dim Satz
Eigenwerte
det

Frühjahr 1995




**Durchfallquoten**
Info: 66.7 %
Mathe: 62.5 %



Herausgeberin: Fachschaft Mathematik
GeTEXt von Wolfgang Trinks und Klaus Spitzmüller
Umbrecher: Christian Borgsen
Vorfinanziert mit Hilfe der Semestermarke

Preis: 70 Pfg


Für die Wiedereinführung der ECHTEN verfassten Studierendenschaft.

**Aufgabe I-1** (4 Punkte).

Es sei $G$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Für Untergruppen $A, B$ von $G$ sei $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.
Zeigen Sie: Genau dann ist $AB$ eine Untergruppe von $G$, wenn $AB = BA$ gilt.

**Aufgabe I-2** (4 Punkte).

$U$ und $W$ seien Untervektorräume des Vektorraums $V$ mit $V = U \oplus W$, ferner $\Phi$ eine Abbildung von $U$ nach $W$.
Nun sei $Z := \{u + \Phi(u) \mid u \in U\} \subseteq V$. Zeigen Sie:
(a) Genau dann ist $\Phi$ eine lineare Abbildung, wenn $Z$ ein Untervektorraum von $V$ ist.
(b) Wenn $Z$ ein Untervektorraum von $V$ ist, dann ist $Z$ isomorph zu $U$.

**Aufgabe I-3** (4 Punkte).

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot x .$$

Bestimmen Sie eine geordnete Basis $B$ des $\mathbb{R}^4$ und eine geordnete Basis $C$ des $\mathbb{R}^3$ derart, daß $\Phi$ bezüglich $B$ und $C$ die Abbildungsmatrix

$$D_{CB}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

**Aufgabe I-4** (4 Punkte).

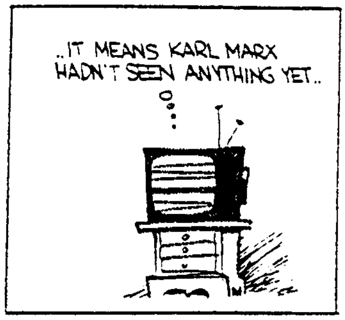
Es seien $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U$ ein Untervektorraum von $V$. $V^*$ und $U^*$ seien die Dualräume. Zeigen Sie:
(a) Die lineare Abbildung $V^* \to U^*, f \mapsto f|_U$ ist surjektiv.
(b) $\dim\{f \in V^* \mid f|_U = 0\} = \dim(V) - \dim(U)$.

## Aufgabe I-1

Wegen $e_G \in A$ und $e_G \in B$ ist $e_G \in AB$. Es sei nun $AB$ eine Gruppe. Für beliebige $a \in A$ und $b \in B$ ist dann $(ab)^{-1} \in AB$, also $b^{-1}a^{-1} \in AB$. Also gibt es Elemente $a_1 \in A$ und $b_1 \in B$ mit $b^{-1}a^{-1} = a_1 b_1$. Das zeigt $AB = BA$.
Gilt umgekehrt diese Gleichung, ist mit $ab$ auch $(ab)^{-1}$ wieder in $AB$ enthalten. Seien außerdem $a_2 \in A$ und $b_2 \in B$ gegeben. In dem Produkt $aba_2b_2$ kann man den Teilausdruck $ba_2$ in der Form $a_3b_3$ mit $a_3 \in A$ und $b_3 \in B$ schreiben; $aba_2b_2 = aa_3b_3b_2$ liegt daher wieder in $AB$. Somit ist $AB$ eine Untergruppe.
[Je 2 P. für jede der beiden Richtungen.]
Bemerkung: Viele Bearbeiter behaupteten $AB = BA \Leftrightarrow \forall a \in A, b \in B : ab = ba$. So geht es natürlich nicht. Man nehme z.B. $G = S_3$ und darin $A = A_3$, $B$ als eine Untergruppe der Ordnung $2$.


## Aufgabe I-2

(a) Es sei zunächst $\Phi$ linear und $z_1, z_2 \in Z$ sowie $\alpha \in K$ (dem Grundkörper). Dann gibt es $u_1, u_2 \in U$, so daß $z_i = u_i + \Phi(u_i) \quad (i = 1,2)$.
Nun rechnet man: $\alpha z_1 + z_2 = \alpha(u_1 + \Phi(u_1)) + u_2 + \Phi(u_2) = \alpha u_1 + \Phi(\alpha u_1) + u_2 + \Phi(u_2) = \alpha u_1 + u_2 + \Phi(\alpha u_1 + u_2)$. Das zeigt $\alpha u_1 + u_2 \in Z$. Natürlich ist $Z$ nicht leer wegen $0 = 0 + \Phi(0) \in Z$.
Nun sei $\Phi$ nicht linear. Dann gibt es $\alpha \in K$ und $u_1, u_2 \in U$ so, daß die Gleichung $\Phi(\alpha u_1 + u_2) = \alpha\Phi(u_1) + \Phi(u_2)$ nicht richtig ist. Wenn man also $z_i := u_i + \Phi(u_i) \quad (i = 1, 2)$ setzt, hat man Elemente $z_i \in Z$ gefunden, so daß $\alpha z_1 + z_2 \notin Z$ ist. Daher ist $Z$ dann kein Untervektorraum.
(b) Wir definieren eine Abbildung $\Psi : Z \to U$ durch $\Psi(u + \Phi(u)) := u$. $\Psi$ ist wohldefiniert, denn aus $u_1 + \Phi(u_1) = u_2 + \Phi(u_2)$ folgt $u_1 - u_2 = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) \in U \cap W = \{0\}$, also $u_1 = u_2$. $\Psi$ ist offenbar auch linear (Rechnung ähnlich wie in Teil (a)) und surjektiv. Nach dem Homomorphiesatz gilt also $U = \mathrm{Bild}(\Psi) \simeq Z/\mathrm{Kern}(\Psi)$. Wir berechnen $\mathrm{Kern}(\Psi)$:
$z = u + \Phi(u) \in \mathrm{Kern}(\Psi) \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Daher ist $Z \simeq U$.
[Je 2 P. für beide Teile.]





## Aufgabe I-3

Es müssen Basen $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ so gefunden werden, daß $\Phi(b_i) = c_i \quad (i = 1, 2, 3)$ und $\Phi(b_4) = 0$ ist. Da die ersten drei Spalten der gegebenen Matrix offenbar linear unabhängig sind, wie man durch Entwicklung der Determinante nach der zweiten Spalte sieht, kann man $b_i = e_i \quad (i = 1, 2, 3)$ nehmen. Eine mögliche Lösung für $C$ sind also die ersten drei Spalten der Matrix. Umformung der Matrix mit dem Gaußalgorithmus ergibt $b_4 = {}^t(-3, 2, 3, 3)$ als mögliche Wahl (eines Basisvektors von $\mathrm{Kern}(\Phi)$).
[1 P. für die Idee, den Kern zu bestimmen, und den Ansatz; 0.5 P. für das richtige Ergebnis; 0.5 P. für $b_4 \in \mathrm{Kern}(\Phi)$; 2 P. für den Rest.]

## Aufgabe I-4

(a) Es sei $g \in U^*$. Es ist zu zeigen, daß es ein $f \in V^*$ gibt mit $f|_U = g$.
Sei $b_1, \dots, b_k$ eine Basis von $U$, die durch $b_{k+1}, \dots, b_n$ zu einer Basis von $V$ ergänzt sei. Durch die Vorschrift $f(b_i) := g(b_i)$ $(i \leq k)$ und $f(b_i) := 0$ $(i > k)$ ist dann ein Element von $V^*$ mit der gewünschten Eigenschaft auf der Basis definiert und dadurch eindeutig bestimmt. Jedes $u \in U$ hat die Form $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_k b_k$, daher ist dann:

$$f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_k f(b_k) = \alpha_1 g(b_1) + \cdots + \alpha_k g(b_k) = g(u)$$

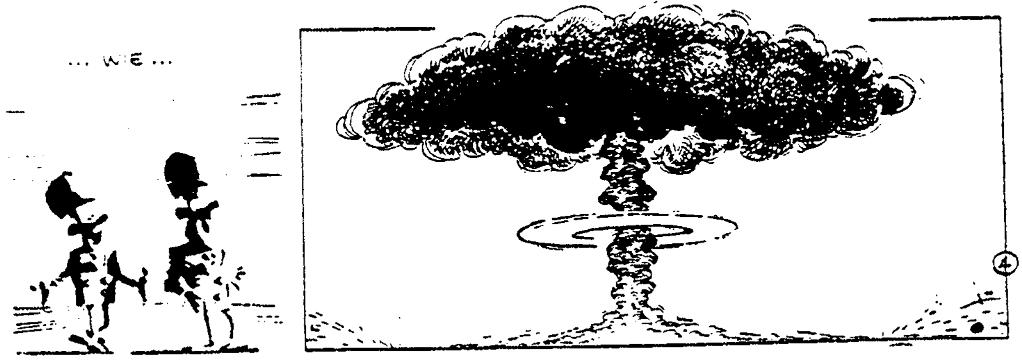
(b) Wir nennen die lineare Abbildung aus (a) $\Phi$. Dann ist also nach der Dimension von $\mathrm{Kern}(\Phi)$ gefragt. Nach dem Homomorphiesatz gilt $\mathrm{Bild}(\Phi) \simeq V^*/\mathrm{Kern}(\Phi)$ und für die Dimensionen also

$$k = \dim(U) = \dim(U^*) = \dim(\mathrm{Bild}(\Phi)) = \dim(V^*) - \dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \dim(V) - (n-k)$$

Also ist $\dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = n - k = \dim(V) - \dim(U)$.
[Je 2 P. für beide Teile.]


## Aufgabe I-5

(a) Es ist zu zeigen, daß $\tilde{\Phi}$ wohldefiniert ist. Ist $x + E_\lambda = y + E_\lambda$, so hat man $x - y \in E_\lambda$ und also $\Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(x-y) = \lambda(x-y) \in E_\lambda$, daher $\Phi(x) + E_\lambda = \Phi(y) + E_\lambda$. Daß $\tilde{\Phi}$ auch linear ist, rechnet man leicht nach.
(b) Es sei $y$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu$. Wegen $\mu \neq \lambda$ ist dann $y \notin E_\lambda$, also $y + E_\lambda$ nicht das Nullelement von $V/E_\lambda$. Wir behaupten, daß $y + E_\lambda$ ein Eigenvektor von $\tilde{\Phi}$ zum Eigenwert $\mu$ ist. Nun, $\tilde{\Phi}(y + E_\lambda) = \Phi(y) + E_\lambda = \mu y + E_\lambda = \mu(y + E_\lambda) + E_\lambda$.
(c) Diesmal wählt man $z \in \mathrm{Kern}((\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^2) \setminus \mathrm{Kern}(\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$. Dann ist wieder $z + E_\lambda$ nicht das Nullelement. Genau so wie in (b) rechnet man nach, daß $z + E_\lambda$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ ist.
[1+1.5+1.5 P.]




## Aufgabe I-6

(i) (mit Denken): Offenbar soll das charakteristische Polynom von $-A$ berechnet werden. Da $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$ ist, ist $0$ ein Eigenwert von $A$ mit Vielfachheit $\geq n-1$. Daher ist das Polynom Vielfaches von $\lambda^{n-1}$. Andererseits ist der Koeffizient von $\lambda^{n-1}$ gleich dem Negativen der Spur von $-A$. Das ergibt die Behauptung.

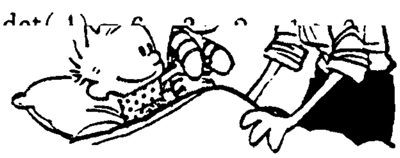
**Aufgabe II-2**

(a) Da $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ als symmetrische Bilinearform vorausgesetzt war, gilt:

$$\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \text{ ist Skalarprodukt} \iff \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \text{ positiv definit} \iff A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ positiv definit.}$$

Da für die Hauptminoren $\det(1) = 1 > 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \end{pmatrix} = 1 > 0$ und $\det($

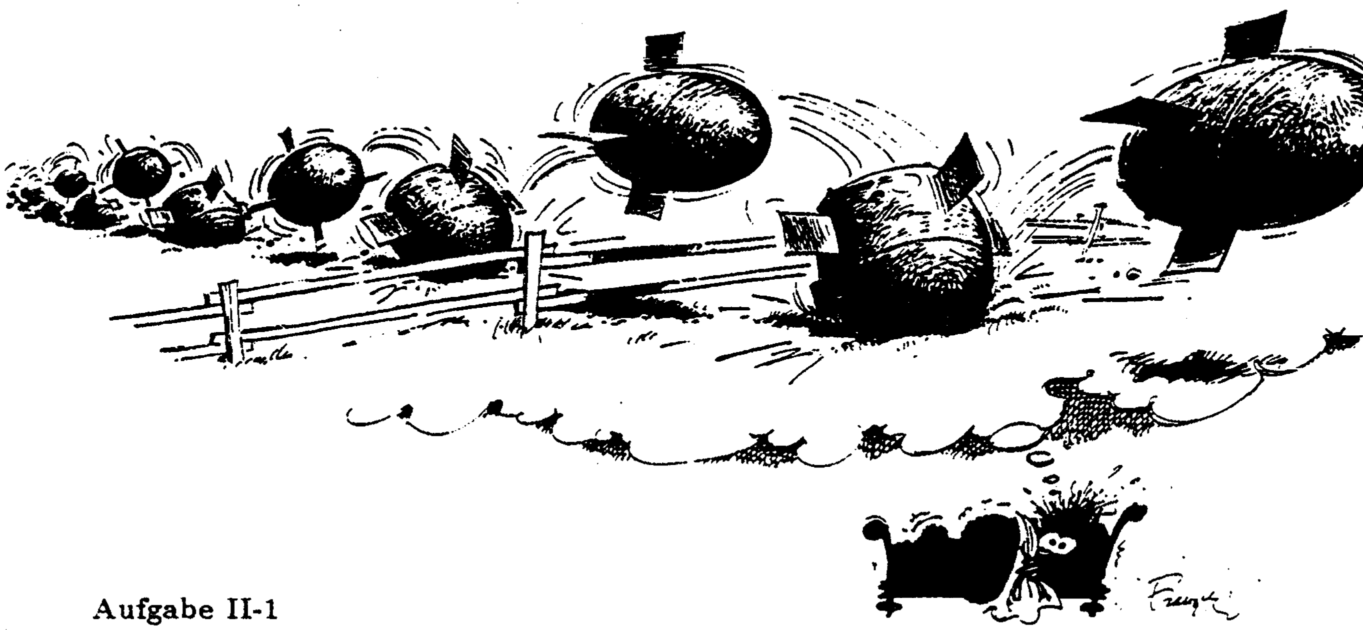
$$\begin{pmatrix} \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \lambda + \alpha_{kk} & \dots & & \alpha_{kn} \\ 0 & \dots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & -\lambda\beta_n & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$



Wenn man jetzt zur $k$-ten Spalte jeweils das $\beta_i$-fache der $i$-ten Spalte addiert $(i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$, ändert sich die Determinante wieder nicht, und man erhält in der Spalte Nr. $k$ Nullen außer beim Diagonalelement, das den Wert

$$\lambda + \alpha_{kk} + \sum_{i \neq k} \beta_i \alpha_{ki} = \lambda + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$$

bekommt. Sonst enthält die Matrix nur $\lambda$ auf der Diagonalen und Nullen, außer in der Zeile $k$. Die Determinante ist also das Produkt der Diagonalelemente, das ist die Behauptung.
[Punkte je nach Vollständigkeit. – Es gibt auch andere Lösungswege. Z.B. steht eine fertige Formel in Satz 11.1-3 des Skriptums von Rehm & Trinks, von der die Formel der Aufgabe ein leichter Spezialfall ist.]



**Aufgabe II-1**

(a) Das Minimalpolynom $m$ ist ein Teiler des Hauptpolynoms $h$. Der konstante Koeffizient von $h$ ist $\pm\det(A)$. Wenn also $m(0) = 0$ ist, dann ist erst recht $h(0) = \pm\det(A) = 0$ und $A$ nicht invertierbar. Ist $m(0) \neq 0$, dann ist auch $h(0) \neq 0$, da $m$ und $h$ dieselben Nullstellen haben. In diesem Fall ist also $\det(A) \neq 0$ und daher $A$ invertierbar.
(b) Die Gleichung $m(\Phi) = 0$ kann man nach Multiplikation mit $\Phi^{-1}$ umformen zu

$$\Phi^{-1} = m(0)^{-1}\Phi^{-1}(m(0)I - m(\Phi)) .$$

Die rechte Seite ist nach Ausmultiplizieren ein Polynom des Grades $k-1$ in $\Phi$, wie verlangt.

## Aufgabe II-2

(a) Da $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ als symmetrische Bilinearform vorausgesetzt war, gilt:

$$\langle\cdot\mid\cdot\rangle \text{ ist Skalarprodukt} \iff \langle\cdot\mid\cdot\rangle \text{ positiv definit} \iff A := \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&2&0\\ 1&0&3 \end{pmatrix} \text{ positiv definit.}$$

Da für die Hauptminoren $\det(1) = 1 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 1&1\\ 1&2 \end{pmatrix} = 1 > 0$ und $\det(A) = 6 - 3 - 2 = 1 > 0$ gilt, ist $A$ nach dem Hauptminorenkriterium positiv definit.


(b) (i) Es ist

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \text{also } \alpha = \frac{\pi}{4}\,.$$


(ii)

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 3x_3 = 0 \right\} = \left[ y := \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$


Eine ONB von $U$ erhält man mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren:

$\tilde{b}_1 := y$ ,

$$\tilde{b}_2 := z - \frac{\langle z \mid \tilde{b}_1\rangle}{\langle \tilde{b}_1 \mid \tilde{b}_1\rangle}\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Mit $\|\tilde{b}_1\| = \sqrt{6}$ und $\|\tilde{b}_2\| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ergibt sich durch Normierung schließlich die gesuchte ONB:

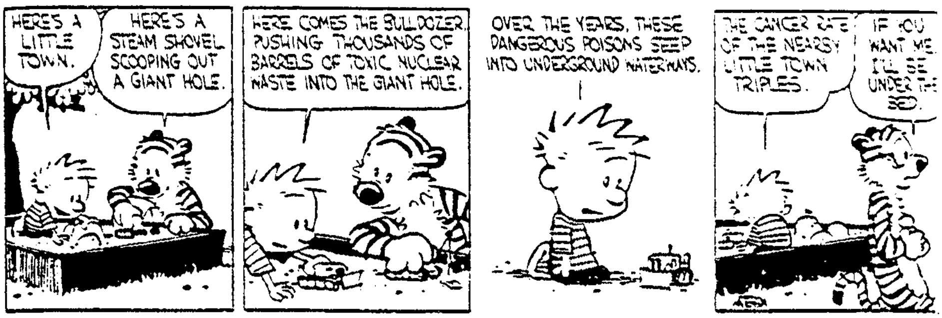
$$\left\{ b_1 := \frac{1}{\|\tilde{b}_1\|}\tilde{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\ b_2 := \frac{1}{\|\tilde{b}_2\|}\tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

## Aufgabe II-3

(a) Es ist $d(\mathbf{E},\mathbf{F}) = d(Q,R)$ , wenn $Q \in \mathbf{E}$ und $R \in \mathbf{F}$ die Lotfußpunkte eines gemeinsamen Lotes $\mathbf{L}$ von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ sind. Nach der Dreiecksungleichung gilt $d(Q,R) \leq d(Q,P) + d(P,R)$ . Nun sei $P^\dagger$ die Orthogonalprojektion von $P$ auf $\mathbf{L}$ , $P_\mathbf{E}$ die Orthogonalprojektion von $P$ auf $\mathbf{E}$ und $P_\mathbf{F}$ diejenige auf $\mathbf{F}$ . Dann ist $\|P^\dagger - Q\| \leq d(P,\mathbf{E}) = \|P - P_\mathbf{E}\|$ und $\|P^\dagger - R\| \leq d(P,\mathbf{F}) = \|P - P_\mathbf{F}\|$ sowie natürlich $\|Q - R\| \leq \|P^\dagger - Q\| + \|P^\dagger - R\|$ .
Zusammengenommen ergibt das die Behauptung.
(b) (i) Eine Basis des Orthogonalraums der Summe beider Richtungsräume erhält man durch Lösung des LGSs $Ax = 0$ mit ${}^tA = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ . Der Gaußalgorithmus ergibt, daß der Lösungsraum die Dimension 1 hat und etwa von dem Vektor $c := {}^t(4,1,8,-9,-6)$ erzeugt wird. Der Abstand ergibt sich daraus zu $d(\mathbf{E},\mathbf{F}) = \|c\|^{-1}|\langle c, A - B\rangle|$ .
Hier ist $\|c\| = \sqrt{198} = 3\sqrt{22}$ und $\langle c, A - B\rangle = -198$ , also $d(\mathbf{E},\mathbf{F}) = 3\sqrt{22}$ .
(ii) Das sind die Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen den beiden (in diesem Beispiel, wie die Rechnung ergeben hat, eindeutig bestimmten) Lotfußpunkten.


## Aufgabe II-4

Wir zeigen zunächst: $\forall x, y \in V : \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$ . Aus $\|x\| = \|y\|$ folgt nämlich $\|x\|^2 = \|y\|^2$ , also $\langle x + y | x - y\rangle = 0$ . Nach Voraussetzung ist dann
$0 = \langle \Phi(x+y) | \Phi(x-y)\rangle = \langle \Phi(x) + \Phi(y) | \Phi(x) - \Phi(y)\rangle = \|\Phi(x)\|^2 - \|\Phi(y)\|^2$ . Da die Normen $\geq 0$ sind, folgt $\|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$ .
Da $\Phi$ ein Automorphismus ist, gilt $\|\Phi(x)\| \neq 0$ für alle $x \neq 0$ . Die Zahl $0 < \mu^{-1} := \|x\|/\|\Phi(x)\|$ ist daher dieselbe für alle $x \neq 0$ . Für den Endomorphismus $\Psi := \mu^{-1}\Phi$ gilt dann
$\|\Psi(x)\| = \mu^{-1}\|\Phi(x)\| = \|x\|\|\Phi(x)\|^{-1}\|\Phi(x)\| = \|x\|$ für alle $0 \neq x \in V$ und auch für $x = 0$ . Daher ist $\Psi$ eine Isometrie.
Ein etwas anderer Ansatz, bei dem man zwangsläufig auf diesen Anfangs„trick“ geführt wird, geht so: Ist $b_1, \ldots, b_n$ eine ONB von $V$ , so ist nach Voraussetzung $\Phi(b_1), \ldots, \Phi(b_n)$ eine OGB in $V$ . Man kann daher schreiben $\Phi(b_i) = \gamma_i c_i$ mit $\gamma_i > 0$ und einer ONB $c_1, \ldots, c_n$ . Jetzt ist nur noch zu zeigen, daß alle $\gamma_i$ gleich sind. Wenn aber etwa $\gamma_1 \neq \gamma_2$ wäre, dann wären einerseits $b_1 + b_2$ und $b_1 - b_2$ zueinander orthogonal, aber $\Phi(b_1 + b_2)$ und $\Phi(b_1 - b_2)$ nicht. Widerspruch zur Voraussetzung.




## Aufgabe II-5

(a) Einfach nachrechnen:
$\langle \Phi(u+v) | u+v\rangle - \langle \Phi(u-v) | u-v\rangle =$
$= \langle \Phi(u)|u\rangle + \langle \Phi(u)|v\rangle + \langle \Phi(v)|u\rangle + \langle \Phi(v)|v\rangle - (\langle \Phi(u)|u\rangle - \langle \Phi(u)|v\rangle - \langle \Phi(v)|u\rangle + \langle \Phi(v)|u\rangle) =$
$= 2(\langle \Phi(v)|u\rangle + \langle \Phi(u)|v\rangle)$ .
(b) Unter dieser Voraussetzung gilt also nach (a) für alle $u, v \in V$ :
$(*)$ $\langle \Phi(v)|u\rangle + \langle \Phi(u)|v\rangle = 0$ . Insbesondere auch für $\mathrm{i}v$ anstelle von $v$ (mit $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ):
$0 = \langle \Phi(\mathrm{i}v)|u\rangle + \langle \Phi(u)|\mathrm{i}v\rangle = \mathrm{i}\langle \Phi(v)|u\rangle - \mathrm{i}\langle \Phi(u)|v\rangle$ . Daraus folgt
$(**)$ $\langle \Phi(v)|u\rangle - \langle \Phi(u)|v\rangle = 0$ . Zusammen mit $(*)$ ergibt das $\langle \Phi(u)|v\rangle = 0$ für alle $u, v \in V$ . Weil das Skalarprodukt positiv definit ist, folgt daraus $\Phi = 0$ .
(c) $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt und $\Phi$ die Multiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bilden ein Gegenbeispiel.
[1+2+1 P.]

## Aufgabe II-6

(a) Ist $Q_\lambda$ in der Form $x^\top Ax + 2b^\top x + \gamma = 0$ gegeben, so gilt:

$Q_\lambda$ ist Mittelpunktsquadrik $\iff$ Das LGS $Ax = -b$ ist lösbar $\iff$


$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & -1 \end{array}\right) \text{ ist lösbar } \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & -1 \end{array}\right) \text{ ist lösbar } \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & -1 \end{array}\right) \text{ ist lösbar } \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1-\lambda \end{array}\right) \text{ ist lösbar } \iff \lambda \neq 0\,.$$

(b) $$Q_{-1}: \quad 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

Quadratische Ergänzung :

$$\begin{aligned} 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 - (x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - (x_1 + x_3)^2 + 2x_2 + 2(x_1 + x_3) &= 0 \\ y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 2y_2 + 2y_3 &= 0 \\ y_1^2 + (y_2 + 1)^2 - (y_3 - 1)^2 &= 0 \\ z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

An diesen Koordinaten liest man ab, daß $Q_{-1}$ einen Kegel darstellt. Die neuen Koordinaten $z_1, z_2, z_3$ hängen mit den alten Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ wie folgt zusammen:

$$\begin{array}{lcrcrcr} z_1 = y_1 & = & & & x_1 & + x_2 & \\ z_2 = y_2 + 1 & = & 1 & & & + x_2 & \\ z_3 = y_3 - 1 & = & -1 & + & x_1 & & + x_3 \end{array}$$

Also lassen sich die alten Basisvektoren $b_1, b_2, b_3$ aus den neuen Basisvektoren $c_1, c_2, c_3$ wie folgt darstellen (kontragrediente Transformationen !):

$$\begin{array}{lcrcrcr} b_1 & = & c_1 & & & + & c_3 \\ b_2 & = & c_1 & + & c_2 & & \\ b_3 & = & & & & & c_3 \end{array}$$

Die inverse Transformation stellt die neuen Basisvektoren $c_1, c_2, c_3$ mit Hilfe der alten Basisvektoren $b_1, b_2, b_3$ dar:

$$\begin{array}{lcrcrcr} c_1 & = & b_1 & & & - & b_3 \\ c_2 & = & -b_1 & + & b_2 & + & b_3 \\ c_3 & = & & & & & b_3 \end{array}$$

Für den neuen Ursprung $O'$ erhält man aus den Bedingungen $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ die alten Koordinaten $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 0$. also $OO' = b_1 - b_2$.

**Bemerkung:** Die Koordinaten von $O'$ im alten Koordinatensystem sind die Lösung des LGS in (a) für $\lambda = -1$.

**Aufgabe I-5** (4 Punkte).

Es seien $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\Phi$ ein Endomorphismus von $V$, $\lambda$ ein Eigenwert von $\Phi$ und $E_\lambda$ der Eigenraum. Zeigen Sie:
(a) Die Vorschrift $\tilde{\Phi}(x + E_\lambda) := \Phi(x) + E_\lambda$ definiert einen Endomorphismus $\tilde{\Phi}$ des Faktorraums $V/E_\lambda$.
(b) Ist $\mu \neq \lambda$ ein Eigenwert von $\Phi$, so ist $\mu$ auch Eigenwert von $\tilde{\Phi}$.
(c) Falls $\mathrm{Kern}(\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \mathrm{Kern}((\Phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^2)$ ist, dann ist $\lambda$ ebenfalls Eigenwert von $\tilde{\Phi}$.

**Aufgabe I-6** (4 Punkte).

Es seien $K$ ein Körper und $A = (\alpha_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über $K$ mit $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$. $I$ bezeichne die Einheitsmatrix. Zeigen Sie: Für $\lambda \in K$ gilt

$$\det(\lambda I + A) = \lambda^{n-1}(\lambda + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}) .$$

---

**Aufgabe II-1** (4 Punkte).

Es seien $V$ ein Vektorraum der Dimension $n$, $\Phi$ ein Endomorphismus von $V$ und $m_\Phi$ das Minimalpolynom von $\Phi$. Es sei $k = \mathrm{Grad}(m_\Phi)$. Zeigen Sie:
(a) Genau dann ist $\Phi$ ein Automorphismus, wenn $m_\Phi(0) \neq 0$ ist.
(b) Wenn $\Phi$ ein Automorphismus ist, dann ist $\Phi^{-1}$ eine Linearkombination von $\Phi^0, \Phi^1, \ldots, \Phi^{k-1}$.

**Aufgabe II-2** (4 Punkte).

Auf $\mathbb{R}^3$ wird eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot | \cdot \rangle$ wie folgt definiert:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} y \end{cases} .$$

Dabei werden $x$ und $y$ als Spaltenvektoren aufgefaßt.
(a) Zeigen Sie, daß $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.
(b) Berechnen Sie mit diesem Skalarprodukt
  (i) den Winkel zwischen den Vektoren ${}^t(1, 0, 0)$ und ${}^t(0, 1, 0)$.
  (ii) eine ONB von $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x | {}^t(0, 0, 1) \rangle = 0\}$.

**Aufgabe II-3** (4 Punkte).

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ affine Unterräume des euklidischen $\mathbb{R}^5$. Mit $d(\cdot,\cdot)$ wird der euklidische Abstand bezeichnet.
(a) Zeigen Sie: Für alle Punkte $P$ gilt $d(\mathbf{E},\mathbf{F}) \le d(P,\mathbf{E}) + d(P,\mathbf{F})$.
(b) Nun sei speziell $\mathbf{E}$ der affine Unterraum, der durch den Punkt $A$ geht und den Richtungsraum $\mathbb{R}a_1 + \mathbb{R}a_2$ hat. Der Unterraum $\mathbf{F}$ gehe durch $B$ und habe den Richtungsraum $\mathbb{R}b_1 + \mathbb{R}b_2$. Die Punkte $A, B$ und die Vektoren $a_1, a_2, b_1, b_2$ seien durch folgende Tabelle gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{E},\mathbf{F})$ der beiden Räume.
(ii) Charakterisieren Sie mit geometrischen Begriffen die Menge aller Punkte $P$, für die in (a) das Gleichheitszeichen gilt. (Ein Beweis ist nicht verlangt. — Die Punkte sollen nicht numerisch ausgerechnet werden!)

**Aufgabe II-4** (4 Punkte).

Es seien $V$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi$ ein Automorphismus von $V$, der die Orthogonalität erhält, d.h.
$\forall x, y \in V : x \perp y \Rightarrow \Phi(x) \perp \Phi(y)$. Zeigen Sie, daß dann $\Phi$ von der Form $\Phi = \mu \cdot \Psi$ ist mit $\mu \in \mathbb{R}$ und einer Isometrie $\Psi$.

**Aufgabe II-5** (4 Punkte).

Es seien $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und $\Phi$ ein Endomorphismus von $V$. Zeigen Sie:
(a) Für $u, v \in V$ gilt

$$\langle \Phi(u+v)|u+v\rangle - \langle \Phi(u-v)|u-v\rangle = 2(\langle \Phi(v)|u\rangle + \langle \Phi(u)|v\rangle) .$$

(b) Wenn $\langle \Phi(v)|v\rangle = 0$ gilt für alle $v \in V$, dann ist $\Phi = 0$.
(c) Die Aussage in (b) gilt nicht für reelle Vektorräume mit Skalarprodukt.

**Aufgabe II-6** (4 Punkte).

Im dreidimensionalen reellen affinen Raum $\mathbf{A}$ sei eine Quadrik $Q_\lambda$ bezüglich eines Koordinatensystems $(O; b_1, b_2, b_3)$ gegeben durch die Gleichung

$$(1+\lambda)x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 .$$

(a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $Q_\lambda$ eine Mittelpunktsquadrik ist.
(b) Bestimmen Sie für $\lambda = -1$ die affine Normalform von $Q_\lambda$ und geben Sie ein affines Koordinatensystem an, bezüglich dessen die Gleichung von $Q_\lambda$ die Normalform annimmt.