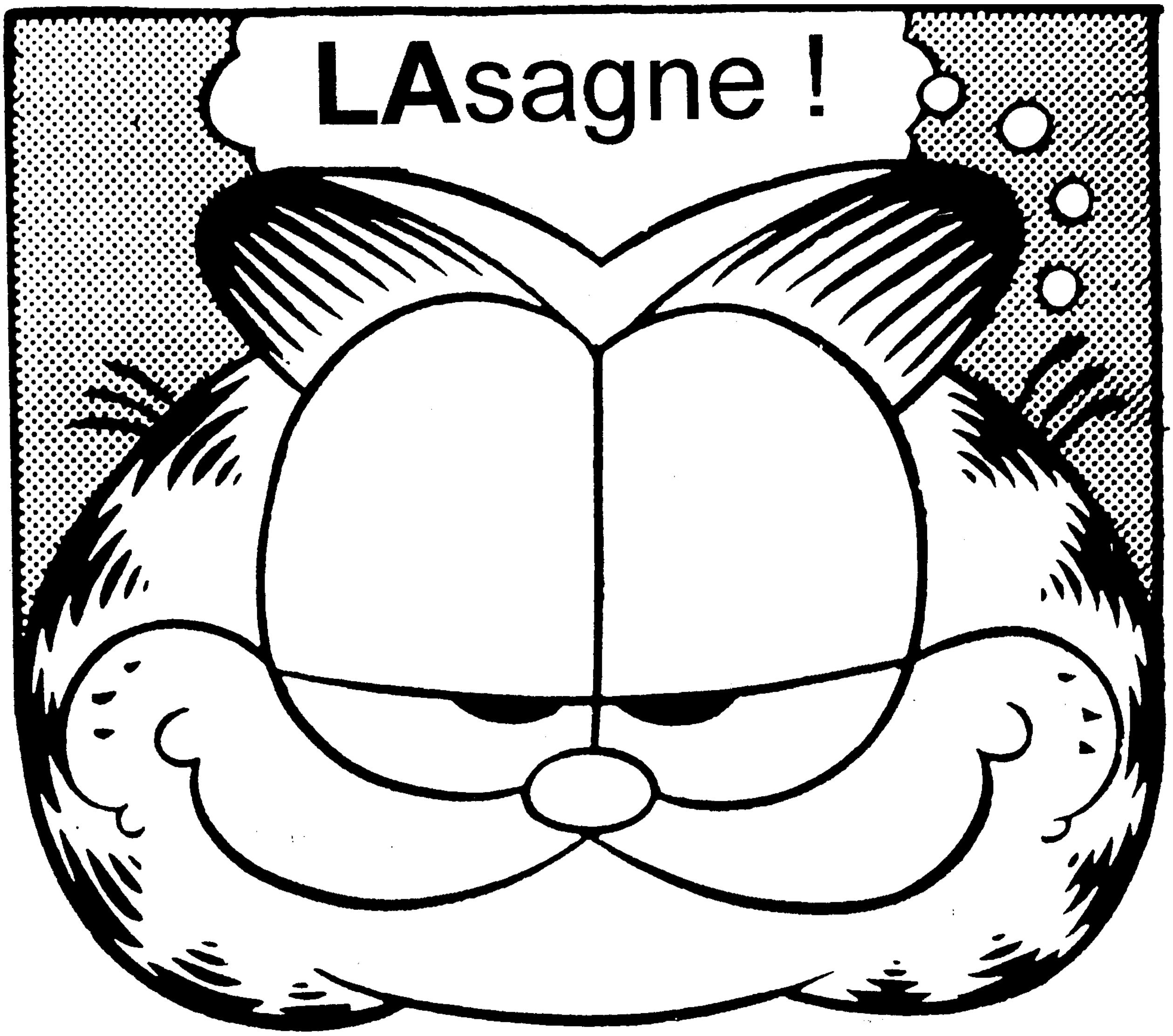


Manchmal erwischst Du die Klausur,
und manchmal erwischt die Klausur Dich.

DNF \ 5-^75

EW
Selbstadj.

Abstand

Drehung

Restklassenbeweis
L. Abh. Bew.

Basen

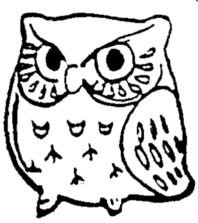
VVR-Bew
VR

LA F 97

Preis : 0,70 DM

hrsg. : FS math

Umgebrochen von Johannes Korsawe



Aufgaben

Aufgabe I.1:

Gegeben seien die symmetrische Gruppe S_n, $n \geq 2$, die Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_m, +)$, $m \geq 2$, und ein Homomorphismus $f : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$.
Zeigen Sie:

a) Für alle Transpositionen $\tau \in S_n$ gilt $2f(\tau) = 0$.

b) Für alle Permutationen $\pi \in S_n$ gilt $2f(\pi) = 0$.

c) Ist f surjektiv, so gilt $m = 2$.

Aufgabe I.2:

Gegeben seien $n \geq 2$ lineare Abbildungen $\Phi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\Phi_j((x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)^t) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)^t$$

$j = 1, \dots, n$, sowie r linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Kern} \Phi_1 \oplus \dots \oplus \operatorname{Kern} \Phi_n$.

b) $\forall_j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\operatorname{Kern} \Phi_j \subset [a_1, \dots, a_r] \Leftrightarrow \Phi_j(a_1), \dots \Phi_j(a_r)$ sind linear unabh.

c) Unter den Abbildungen $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ gibt es höchstens r paarweise verschiedene $\Phi_{j_1}, \dots, \Phi_{j_r}$, so daß für alle $i = 1, \dots, r$ die Vektoren $\Phi_{j_i}(a_1), \dots, \Phi_{j_i}(a_r)$ linear abhängig sind.

Aufgabe I.3:

Im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^5$ seien zwei Unterevektorräume U und W_a gegeben:

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2-2i \\ 2-2i \\ i \end{pmatrix} \right], \quad W_a = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a+3 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -a-2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad a \in \mathbb{C}$$

Berechnen Sie für jedes $a \in \mathbb{C}$ Basen von $U \cap W_a$ und $U + W_a$.

Aufgabe I.1 :

a. Für Transpositionen τ ist $\tau^2 = \tau \circ \tau = id$ (neutrales Element von S_n). Lt. Vorlesung ist für Homomorphismus $f : S_n \longrightarrow Z_m : f(id) = 0 = \bar{0}$ (neutrales Element von Z_m).
Also $2f(\tau) = f(\tau) + f(\tau) = f(\tau \circ \tau) = f(id) = 0$.

b. Sei $\pi \in S_n$. Lt. Vorlesung existieren Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_l (l \in N)$ $mit\, \pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_l$.
Daher ist $2f(\pi) = 2(f(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_l)) = 2f(\tau_1) + \ldots + 2f(\tau_l) = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$,denn Z_m ist kommutative Gruppe.

c. Ist f surjektiv, so existiert insbesondere $\pi \in S_n$ mit $f(\pi) = \bar{1}$ (Restklasse von 1). Nach b. ist $0 = \bar{0} = 2f(\pi) = 2 * \bar{1} = \bar{2}$. Nach Definition der Gleichheit von Restklassen besagt das, daß m ein Teiler von $2 - 0 = 2$ ist. Wegen $m \in N, m \geq 2$, muß also $m = 2$ sein.

Aufgabe I.2 :

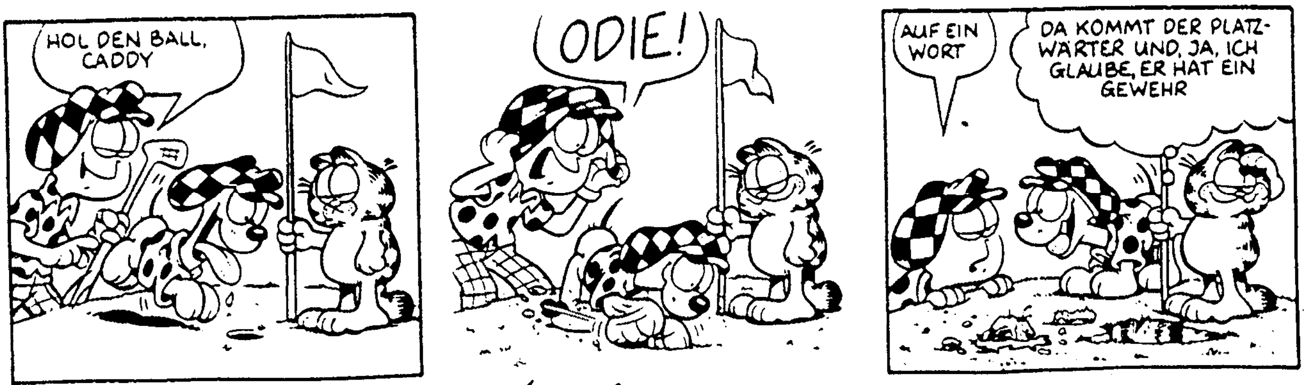
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in Ker\Phi_j \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_n = 0. Also : \; mit\, e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

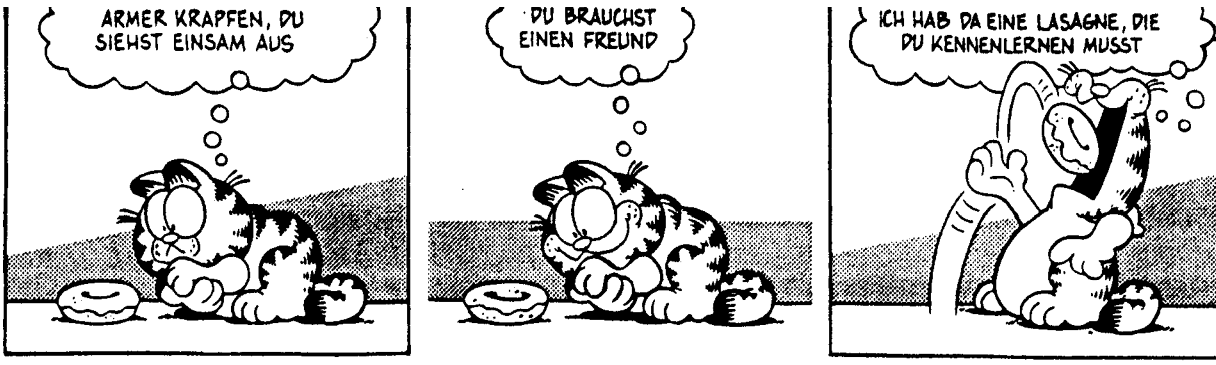
(j-ter Standardbasisvektor) : $Ker\Phi_j = [e_j]$.

a. $\sum_{j=1}^n Ker\Phi_j$ ist ein Untervektorraum, der die Standardbasis enthält, also $= R^n$.Ist
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in Ker\Phi_i \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Ker\Phi_j, \text{ so ist } x_j = 0\,(j \neq i)\; wegen\, x \in Ker\Phi_i$$
$,und\, x_i = 0\, wegen\, x \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Ker\Phi_j$, also $x = 0$. Daher $Ker\Phi_i \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Ker\Phi_j = \{0\}$, also ist die Summe direkt.

b. Wegen $dim(Ker\Phi_j) = 1$ gilt für $U := [a_1, \ldots, a_r] : Ker\Phi_j \subset U \Leftrightarrow 0 \neq U \cap Ker\Phi_j = Ker\Phi_j|_U \overset{Vorl}{\Longleftrightarrow} \Phi_j|_U$ ist nicht injektiv.Nach Vorlesung ist eine lineare Abbildung $U \rightarrow W$ genau dann injektiv, wenn eine Basis von U auf ein System linear unabhängiger Vektoren abgebildet wird, d.h.$\Phi_j|_U$ nicht injektiv $\Leftrightarrow \Phi_j(a_1), \ldots, \Phi_j(a_r)$ linear abhängig.

c. Annahme : Es gibt $\Phi_{j_1}, \ldots, \Phi_{j_{r+1}}$ (paarweise verschieden), so daß $\forall_{i=1,\ldots,r+1}$ die Vektoren $\Phi_{j_i}(a_1), \ldots, \Phi_{j_i}(a_r)$ linear abhängig sind. Nach b.,c. besagt das
$\forall_{i=1,\ldots,r+1} : e_i \in [a_1, \ldots, a_r] = U$. U enthält also r+1 verschiedene Vektoren aus der Standardbasis. Diese sind linear unabhängig, also ist $dim(U) \geq r + 1 > r = dim(U)$. Wid !



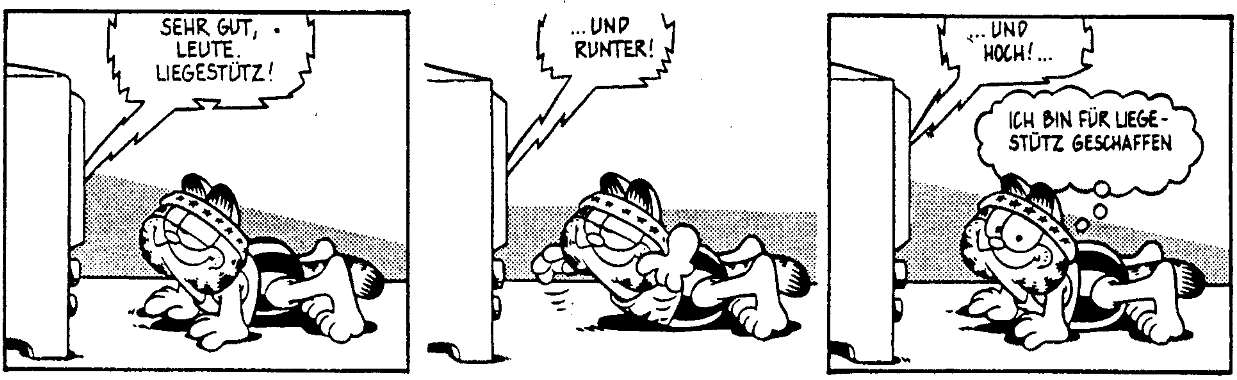


Aufgabe I.3 :

Nenne das vorgegebene Erzeugendensystem von $U\{u_1, u_2, u_3\}$ und das von $W_a\{w_1, w_2, w_3\}$. Genau dann ist $x \in U \bigcap W_a$, wenn $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$ eine Lösung $\gamma = (\alpha_1, \ldots, -\beta_3)$ hat $\Rightarrow$ homogenes LGS für γ mit der Matrix $A = (u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 1 & i \\ i & 0 & 1+i & 0 & i & -1 \\ -i & 0 & -2-2i & a+3 & 0 & -a-2 \\ 2 & 0 & 2-2i & 0 & a+1 & 2i \\ 0 & 1 & i & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i & a+3 & i & -a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

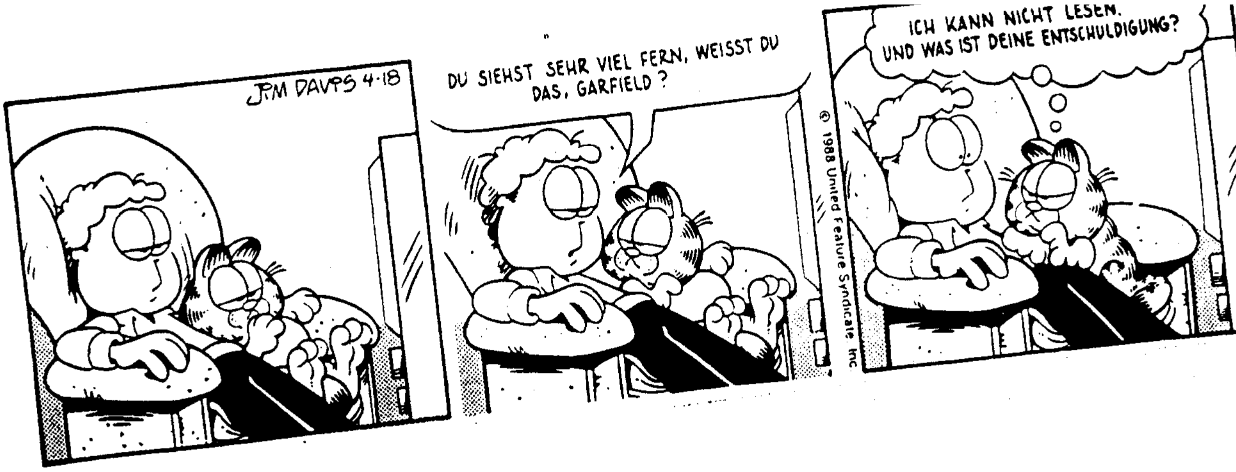
Man sieht jetzt : Die Dimension von $U + W_a$ ist genau dann 3, wenn $a = 1$ ist, sonst 4. Die Vektoren w_1 und w_3 liegen stets in U, und im Fall $a = 1$ auch w_2. Eine Basis von $U \bigcap W_a$ ist also $\{w_1, w_3\}$ im Falle $a \neq 1$ und $\{w_1, w_2, w_3\}$ im Falle $a = 1$. Daß diese Vektoren auch wirklich unabhängig sind, zeigt ein Blick auf die zweite Matrix.



Aufgabe I.4 :

a. Sei $x + U_1 \in V/U_1$. Dann gibt es genau ein Paar $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ mit $x = x_1 + x_2$
$(da\ V = U_1 \oplus U_2)$. $\Rightarrow (x + U_1) \bigcap U_2 = \{x2\}$
denn :"$\supseteq$": $x_2 \in x_2 + U_1 = x + U_1$.
"$\subseteq$": $Sei\ y_1 \in U_1\ mit\ x + y_1 \in U_2 \Rightarrow x_1 + y_1 \in U_2 \Rightarrow x_1 + y_1 = 0 (U_1 \bigcap U_2 = 0!) \Rightarrow x + y_1 = x_2$.
Die Abbildung Φ ist offensichtlich die Umkehrabbildung zur Komposition $U_2 \hookrightarrow V \to V/U_1$ der Inklusionsabbildung $U_2 \hookrightarrow V$ mit der kanonischen Abbildung $V \to V/U_1$ und damit linear.

b. $\tilde{B} := (b_1 + U_1, \ldots, b_k + U1)$ ist eine Basis von V/U_1 (nach Vorlesung), so daß die Abbildungsmatrix von Φ bzgl. $B, \tilde{B}$ die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ hat.

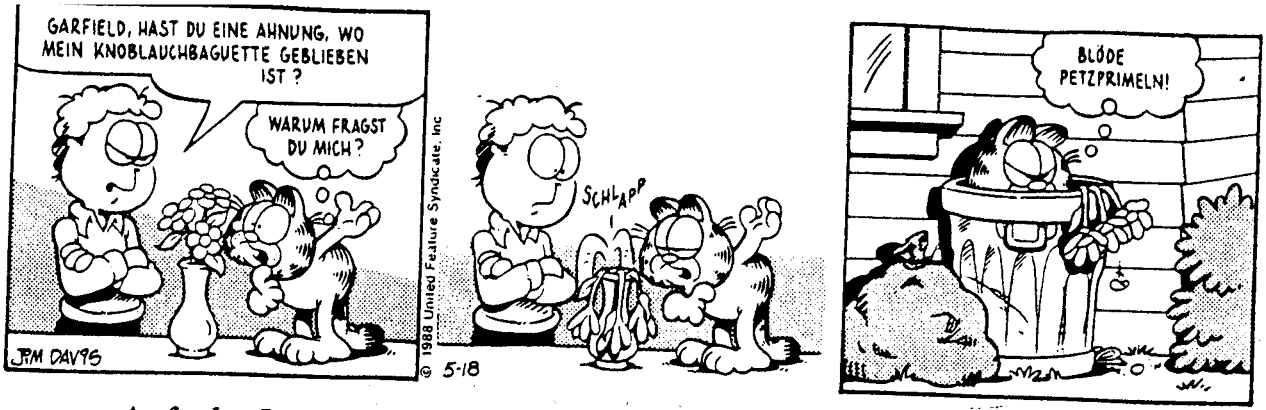


Aufgabe I.5 :

Wegen $dimBild\Phi = 1$ gibt es ein $a \in V \setminus \{0\}$ mit $< a >= Bild\Phi$. $\Rightarrow \forall v \in V$ gibt es $\lambda_v \in R$ mit $\Phi(v) = \lambda_v a$ und es gibt genau ein λ_a mit $\Phi(a) = \lambda_a a$.

a. Es folgt für $v \in V : \Phi^2(v) = \Phi(\Phi(v)) = \Phi(\lambda_a a) = \lambda_a \Phi(a) = \lambda_v \lambda_a a = \lambda_a \Phi(\lambda_v a) = \lambda_a \Phi(v)$. Also gilt die Behauptung mit $c = \lambda_a$.

b. Mit Basisergänzungssatz wähle man Basis $\{a, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ von V. Dann ist das System $B := \{\Phi(a) + a, \Phi(b_2) + b_2, \ldots, \Phi(b_n) + b_n\}$ ein Erzeugendensystem von $Bild(\Phi + id_V)$. Die Vektoren $\Phi(b_2) + b_2, \ldots, \Phi(b_n) + b_n$ sind linear unabhängig. Denn gäbe es $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$ mit $0 = \sum_{i=2}^n \lambda_i(\Phi(b_i) + b_i) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \lambda_{b_i} a + \sum_{i=2}^n \lambda_i b_i$, dann folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $a, b_2, \ldots, b_n$, daß $\lambda_i = 0$ für $i = 2, \ldots, n$ und also $dimBild(\Phi + id_V) \geq n - 1$.
1.Fall : Sei $c = -1$. Dann ist $\Phi(a) + id_V(a) = \lambda_a a + a = ca + a = -a + a = 0$. $\Rightarrow$B ist ein Erzeugendensystem von $Bild(\Phi + id_V)$, das $n - 1$ linear unabhängige Vektoren enthält.$\Rightarrow$ $dimBild(\Phi + id_V) = n - 1$.
2.Fall : Sei $c \neq -1$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ gegeben, für die
$0 = \lambda_1(\Phi(a) + id_V(a)) + \sum_{i=2}^n \lambda_i(\Phi(b_i) + id_V(b_i)) = (\lambda_1(c+1) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \lambda_{b_i})a + \sum_{i=2}^n \lambda_i b_i$ gilt. Weil B Basis ist, ist dann $\lambda_i = 0$ für $i \geq 2$ und $\lambda_1(c+1) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \lambda_{b_i} = 0 \Rightarrow \lambda_1(c+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. $\Rightarrow$ B ist ein Erzeugendensystem von $Bild(\Phi + id_V)$,das aus n linear unabhängigen Vektoren besteht.$\Rightarrow$ $dimBild(\Phi + id_V) = n$.



Aufgabe I.6 :

Die $x_1, \ldots, x_n$ bilden eine Basis von V, wenn ihre Koordinatenvektoren $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ bezüglich der gegebenen Basis $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Determinante von

$$M_c := \left(\hat{x}_1 | \ldots | \hat{x}_n\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c \\ c & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c & 1 \end{pmatrix} \text{ von Null verschieden ist.}$$

Entwickeln nach der letzten Spalte liefert :

$$det(M_c) = (-1)^{n+1} * c * \begin{vmatrix} c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 1 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} c^n + 1.$$

<u>1.Fall :</u> n gerade. $det M_c = 0 \Leftrightarrow c^n = 1 \Leftrightarrow c \in \{-1, 1\}$

<u>2.Fall :</u> n ungerade. $det M_c = 0 \Leftrightarrow c^n = -1 \Leftrightarrow c = -1$.

Ergebnis : Für gerade n sind die $x_1, \ldots, x_n$ genau dann Basis von V, wenn $c \in R \setminus \{-1, 1\}$ ist. Für ungerade n sind die $x_1, \ldots, x_n$ genau dann Basis von V, wenn $c \in R \setminus \{-1\}$ ist.

Und jetzt noch einige Bemerkungen zur Statistik:

Insgesamt nahmen an dieser Klausur 44 Informatiker und 28 Mathematiker teil. Der beste Informatiker erreichte 26 von 48 möglichen Punkten, der beste Mathematiker erzielte 36,5 von 56 möglichen Punkten.
Bei den Aufgaben I.1 und I.2 war jeweils 0 die häufigste Punktzahl; 4 Punkte gab es kein einziges mal.
Die Aufgabe I.3 war die am häufigsten bearbeitete Aufgabe der Klausur; 0 war auch hier die häufigste Punktzahl.
Bei der Aufgabe I.4 war 0 die häufigste und 0.5 die zweithäufigste Punktzahl; der beste Mathematiker erreichte 2,5 Punkte.

Auch bei der Aufgabe I.5 war 0 die häufigste und 0,5 die zweithäufigste Punktzahl; alle Informatiker zusammen erreichten 7,5 Punkte.

Bei der Aufgabe I.6 war ebenfalls 0 die häufigste und 0,5 die zweithäufigste Punktzahl.
Die Aufgabe II.1 war die am häufigsten bearbeitete Aufgabe im Teil II der Klausur; die häufigste Punktzahl war 4, die zweithäufigste 0,5.

Bei der Aufgabe II.2 war 0 die häufigste, 0,5 die zweithäufigste und 1,5 die höchste erreichte Punktzahl.
Bei der Aufgabe II.3 war 2 die häufigste, 4 die zweithäufigste und 0 die dritthäufigste Punktzahl.
Bei der Aufgabe II.4 war 0 die häufigste und 0.5 die zweithäufigste Punktzahl; alle Klausurteilnehmer zusammen erhielten 8 Punkte.

Bei der Aufgabe II.5 war 4 die häufigste Punktzahl.
Bei der Aufgabe II.6 war 1,5 die häufigste Punktzahl; 4 Punkte gab es kein einziges mal.

Aufgabe II.1:

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda E_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (1-\lambda)^4 \text{. Also: } \underline{\lambda = 1} \text{ einziger EW.}$$

$$\Rightarrow H_1 = \mathbb{R}^4. \quad \underline{K_1}: \; A - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \underline{K_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]}$$

$$\underline{K_2}: \; (A-E_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim (1\;1\;1\;1) \sim K_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{K_3 = H_1 = \mathbb{R}^4}, \; \underline{\text{Index} = 3}, \; \underline{\dim K_1 = 2}, \; K_3 = K_2 \oplus \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$A - E_4$

$$K_2 = K_1 \oplus \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad K_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Insgesamt:
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II 2:

a) $(\Phi^* \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Phi^{**} = \Phi^* \circ \Phi \Rightarrow \Phi^* \circ \Phi$ selbstadjungiert. Sei c EW von $\Phi^* \circ \Phi \Rightarrow$
$\exists x \neq 0: \Phi^* \circ \Phi(x) = c x \overset{\Phi \text{ bij.}}{\Rightarrow} \Phi(x) \neq 0$ und $c \underbrace{\langle x, x \rangle}_{>0} = \langle \Phi^* \circ \Phi(x), x \rangle$
$= \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle > 0 \Rightarrow c > 0$. Analog für $\Phi \circ \Phi^*$, da mit Φ auch Φ^* bijektiv ist.

b) Sei c EW von $\Phi^* \circ \Phi \Rightarrow \exists x \neq 0: \Phi^* \circ \Phi(x) = c x \Rightarrow \Phi \circ \Phi^* \circ \Phi(x) = c\Phi(x)$, $\Phi(x) \neq 0$
$\Rightarrow c$ EW von $\Phi \circ \Phi^*$. Umgekehrte Richtung analog.

c) $\Phi \circ \Phi^*$ selbstadj. $\Rightarrow \exists$ ONB $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\Phi \circ \Phi^*(x_i) = c_i x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Da $\Phi^* \circ \Phi$ selbstadj. ist mit denselben EWen $c_1, \ldots, c_n$ wie $\Phi \circ \Phi^*$ gibt es eine ONB $(y_1, \ldots, y_n)$ mit $\Phi^* \circ \Phi(y_i) = c_i y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Durch $\Psi(x_i) := y_i$, $i = 1, \ldots, n$ wird eine Isometrie des zugrundeliegenden VRs definiert und es gilt für $i = 1, \ldots, n$:
$\Phi^* \circ \Phi(\Psi(x_i)) = c_i \Psi(x_i)$, also $\Psi^{-1} \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi(x_i) = c_i x_i = \Phi \circ \Phi^*(x_i) \overset{\Psi^* = \Psi^{-1}}{\Rightarrow}$ Beh.

Aufgabe II 3:

$$x - y = \begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\3\\3\end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$ muß auf den Richtungsräumen von E und g senkrecht stehen:

$$0 = \left\langle x - y, \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 10 - 15a_1 + a_2 - 6b$$

analog: $0 = -20 + a_1 - 13a_2 - 6b$, $0 = 10 + 6a_1 + 6a_2 + 10b$

Dies führt auf ein LGS mit erweiterter Matrix

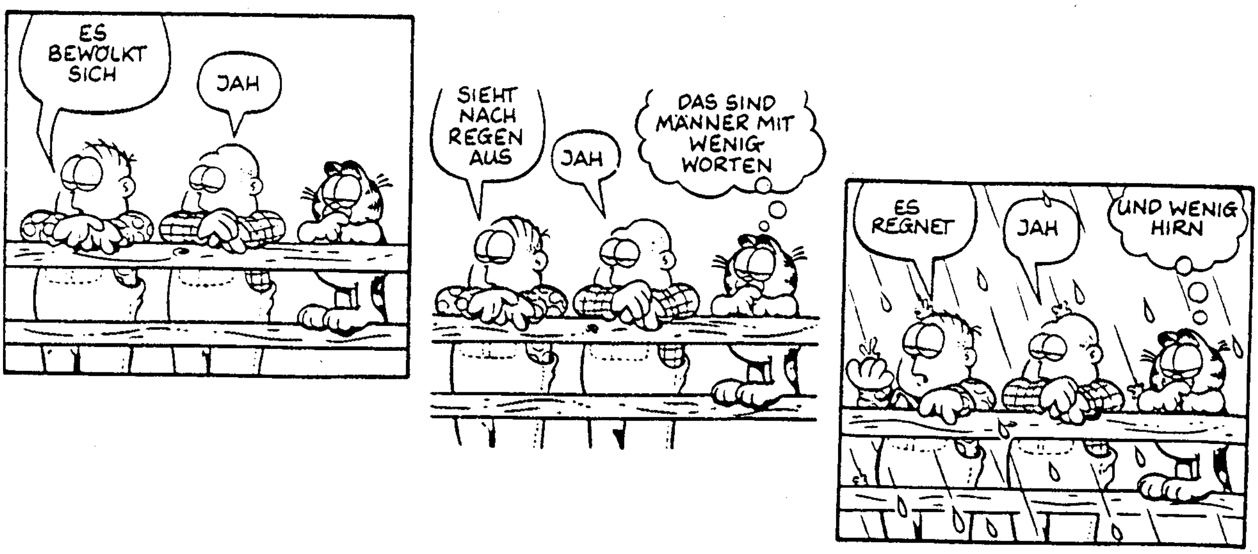
$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & b & \\ \end{array}$$

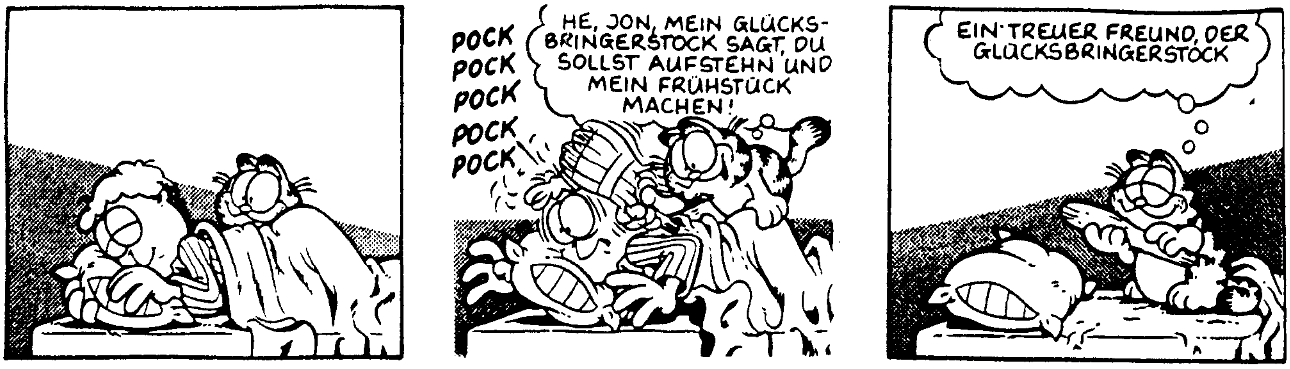
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -15 & 1 & -6 & -10 \\ 1 & -13 & -6 & 20 \\ 3 & 3 & 5 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 16 & 19 & -35 \\ 1 & -13 & -6 & 20 \\ 0 & 42 & 23 & -65 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 16 & 19 & -35 \\ 1 & -13 & -6 & 20 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -13 & -6 & 20 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{a_1 = 1}, \ \underline{a_2 = b = -1}$$

Eingesetzt in E und g ergibt dies:

$$\underline{x = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}}, \ \underline{y = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\\-3\\2\end{pmatrix}} \Rightarrow \underline{x - y = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}} \Rightarrow \underline{d(E,g)} = \|x - y\| = \sqrt{1+1+1+1} = \underline{2}$$





Aufgabe II.4

a) Seien x, y linear abh. $\Rightarrow y = c x \Rightarrow \|y\| = |c|\,\|x\| \Rightarrow c = \pm 1$

Für $c = 1$ ist $y = x$ und $\Phi := id_{\mathbb{R}^2}$ leistet das Verlangte. Für $c = -1$ leistet $\Phi = -id_{\mathbb{R}^2}$ das Verl.

Sei umgekehrt $\Phi(x) = y$, $\Phi(y) = x$, Φ Drehung mit $\det \Phi = 1$

Wären x, y linear unabh., so wäre (x, y) eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und Φ hätte bzgl. dieser Basis die Abb.matrix $A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\Phi = -1$ ↯ Widerspruch.

b) Seien x, y l.a. $\Rightarrow x = \pm y$. Ist $x = y$: Wir setzen $\Phi = id_{\mathbb{R}^3}$.

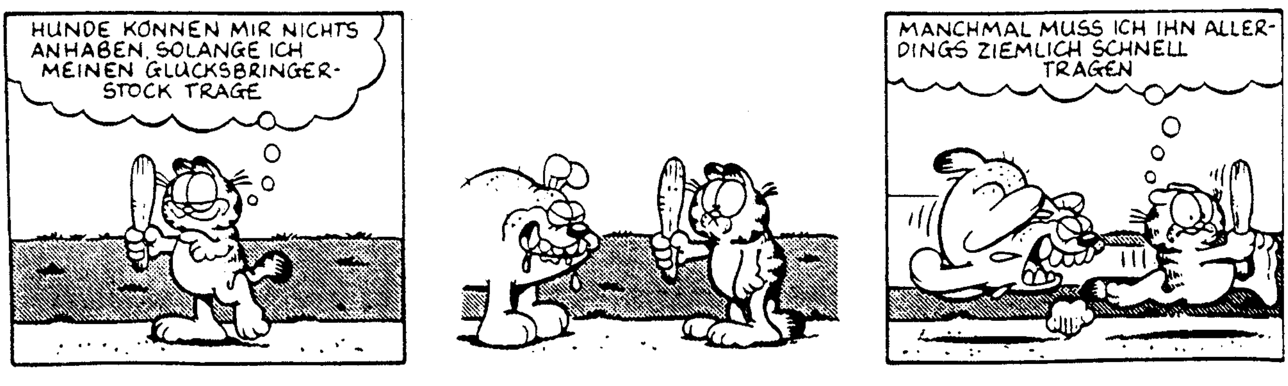
Ist $x \neq y$, $x = -y$: Wir ergänzen x zu einer ONB (x, x_2, x_3) des $\mathbb{R}^3$ und definieren Φ durch $\Phi(x) = -x$, $\Phi(x_2) = -x_2$, $\Phi(x_3) = x_3 \Rightarrow \Phi$ ist eine eigentliche Drehung mit $\Phi(x) = y$, $\Phi(y) = x$.

Seien nun x, y l.u. Wähle $z \in [x, y]^\perp$, $\|z\| = 1$ und definiere Φ durch

$$\begin{aligned} \Phi(x) &:= y & \Phi(x+y) &= x+y \\ \Phi(y) &:= x \quad \Rightarrow & \Phi(x-y) &= -(x-y) \Rightarrow \Phi \text{ hat bzgl. der ONB } B: \\ \Phi(z) &:= -z & \Phi(z) &= -z \end{aligned}$$

$B = \left(\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|}, z\right)$ die Abb.matrix $A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ist also wegen

$A_\Phi A_\Phi^T = E$ eine Isometrie und wegen $\det \Phi = \det A_\Phi = 1$ eine eigentliche Drehung.



Aufgabe II.5:

Φ ist normal $\overset{\dim V<\infty}{\Longrightarrow}$ $\exists$ ONB aus Eigenvektoren von Φ. Bezüglich dieser ONB hat die Abb.-Matrix von Φ die Gestalt $A_\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{pmatrix}$, $c_1,\dots,c_n$ EWe von Φ.

Wegen $A_\Phi^k = \begin{pmatrix} c_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n^k \end{pmatrix}$, $k=0,1,2,\dots$ $\Rightarrow$ $\underline{g(A_\Phi) = \begin{pmatrix} g(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(c_n) \end{pmatrix}}$

Wir zeigen, daß $g(A_\Phi)$ eine unitäre Matrix ist, dann folgt: $g(\Phi)$ ist Isometrie.

Wegen $0 = f(A_\Phi) = \begin{pmatrix} f(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(c_n) \end{pmatrix}$ folgt $f(c_i) = 0$, $i=1,\dots,n$, also nach Vorr.

$$|g(c_i)| = 1, \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow g(A_\Phi)(g(A_\Phi))^* = \begin{pmatrix} g(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(c_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{g(c_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{g(c_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |g(c_1)|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |g(c_n)|^2 \end{pmatrix} = E_n \quad \blacksquare$$

Aufgabe II.6:

1. Fall: $t = 0$ Affine NF von Q_0: $-x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x_1}_{=\bar{x}_1}^2 - (\underbrace{x_1+x_2}_{=\bar{x}_2})^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 = 1$

$\Rightarrow$ hyperbolischer Zylinder $\quad \varphi_0 : \vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

2. Fall: $t \neq 0$: $-x_2^2 + t x_3^2 - 2t(x_1+x_2+x_3) - 2x_1x_2 - 1 + t - t^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 - (x_1+x_2+t)^2 + t x_3^2 - 2t x_3 + t = 1$

$\Leftrightarrow \quad x_1^2 + t(x_3-1)^2 - (x_1+x_2+t)^2 = 1$

Mit $\bar{x}_1 := x_1$, $\bar{x}_2 := \sqrt{|t|}(x_3-1)$, $\bar{x}_3 := x_1+x_2+t$ ergibt sich

2.1: $t > 0$: $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 1 \Rightarrow$ einschaliges Hyperboloid

2.2: $t < 0$: $\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = 1 \Rightarrow$ zweischaliges Hyperboloid

$$\varphi_t : \vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|t|} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{|t|} \\ t \end{pmatrix}$$

Aufgabe I 4:

Es seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, $U_1 \neq \{0\}$, $U_2 \neq \{0\}$ Untervektorräume von V und es gelte $V = U_1 \oplus U_2$. Zeigen Sie

a) In jeder Klasse $x + U_1 \in V/U_1$ gibt es genau einen Vektor $x_2 \in U_2$, und die Abbildung Φ, $\Phi: V/U_1 \to U_2$, $x + U_1 \longmapsto x_2$ mit $\{x_2\} = (x + U_1) \cap U_2$, ist linear.

b) Sei $B = (b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von U_2. Geben Sie eine Basis $\hat{B}$ von V/U_1 so an, daß $D_{B\hat{B}}(\Phi)$ Diagonalgestalt hat (Abbildungsmatrix von Φ bezgl. $\hat{B}, B$).

Aufgabe I.5:

Es seien V ein n-dim. Vektorraum (reell) und $\Phi: V \to V$ eine lineare Abb. mit $\dim \operatorname{Bild} \Phi = 1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\Phi^2 = c\Phi$.

b) $\dim \operatorname{Bild}(\Phi + id_V) = \begin{cases} n-1 & \text{für } c = -1 \\ n & \text{für } c \neq -1 \end{cases}$.

Aufgabe I.6:

Es seien V ein n-dim. reeller VR ($n \geq 2$) und $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, für die, mit $x_i := b_i + c\, b_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $x_n = b_n + c\, b_1$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V ist.

Aufgabe II.1:

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\tilde{A}$, sowie eine reguläre Matrix S mit $\tilde{A} = S^{-1} A S$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & +1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.2:

Es sei Φ ein Automorphismus eines n-dim. euklidischen VRs und Φ^* die Adjungierte zu Φ. Zeigen Sie:

a) Die beiden linearen Abbildungen $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ sind selbstadjungiert und haben nur positive Eigenwerte.

b) $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ haben dieselben Eigenwerte.

c) Es gibt eine Isometrie Ψ mit $\Psi^* \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi = \Phi \circ \Phi^*$.

Aufgabe II.3:

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^5$ (mit Standardskalarprodukt) seien eine Ebene E und eine Gerade g durch:

$$E: x = \begin{pmatrix}1\\1\\5\\-3\\1\end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad g: y = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$$

gegeben. Berechnen Sie den Abstand $d(g,E)$, sowie $x \in E$, $y \in g$ derart, daß $d(x,y) = d(g,E)$.

Aufgabe II.4:

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ seien zwei Vektoren x, y gegeben mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Zeigen Sie:

a) Ist $n = 2$, so existiert genau dann eine Drehung (eigentlich) Φ des $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = y$ und $\Phi(y) = x$, wenn x, y linear abhängig sind.

b) Ist $n = 3$, so existiert stets eine eigentliche Drehung Φ mit $\Phi(x) = y$ und $\Phi(y) = x$.

Aufgabe II.5: (fehlt in Informatiker-Klausur)

Es seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und Φ ein normaler Endomorphismus von V. Ferner seien ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ gegeben mit $f(\Phi) = 0$ (Nullabbildung), sowie ein weiteres Polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, für das $|g(c)| = 1$ gilt für jede Nullstelle $c \in \mathbb{C}$ von f.

Zeigen Sie: $g(\Phi)$ ist eine Isometrie von V.

Aufgabe II.6: (fehlte in Informatiker-Klausur)

Im reellen affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sei bezüglich des Standardkoordinatensystems für jedes $t \in \mathbb{R}$ durch $-x_2^2 + t x_3^2 - 2t(x_1 + x_2 + x_3) - 2x_1x_2 - 1 + t - t^2 = 0$ eine Quadrik Q_t geg.

a) Bestimmen Sie die affine Normalform von Q_t in Abhängigkeit von t.

b) Geben Sie für jedes t eine Affinität $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an, sodaß die Gleichung von $\varphi_t(Q_t)$ bezüglich des gegebenen Koordinatensystems affine Normalform besitzt.

Durchfallquoten, die das Leben schreib:

Informatiker: 70,5 %

Mathematiker: 35 %