Klausuraufgaben zur Linearen Algebra, 16.3.99

I.1. (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit fünf Elementen und $G = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_5\}$.
Auf G definieren wir die Verknüpfung $\circ$ vermöge

$$(a_1, a_2, a_3) \circ (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1 + a_2 b_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Zeigen Sie:

a) $(G, \circ)$ ist eine nichtkommutative Gruppe.

b) Für jedes $x \in G$ ist x^5 das neutrale Element in G.

I.2. (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.
Zeigen Sie:

a) $$U_1 \subseteq U_3 \iff (U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

b) $$V = U_1 \cup U_2 \iff [V = U_1 \text{ oder } V = U_2].$$

I.3 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^4$ seien zwei Vektoren $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sowie ein vom reellen Parameter a abhängender Untervektorraum U_a gegeben:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad U_a = [\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-a \\ 2-a^2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -1+a^2 \\ -1 \\ a^2-a+3 \end{pmatrix}].$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Elemente $\mathbf{v} + U_a$, $\mathbf{w} + U_a$ des Faktorraums $\mathbb{R}^4/U_a$

a) gleich

beziehungsweise

b) linear unabhängig

sind.

I.4 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K.

a) Wann ist eine nichtleere Teilmenge von V linear unabhängig, wann ist sie eine Basis?

b) In $V = K^4$ seien die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Geben Sie für die Fälle $K = \mathbb{F}_3 (= \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ und $K = \mathbb{R}$ eine Basis von $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ an, und ergänzen Sie diese jeweils zu einer Basis von K^4.

I.5 (4 Punkte)

Es seien $n, r \geq 1$ natürliche Zahlen, E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix und A eine komplexe $(n \times n)$-Matrix, die r verschiedene Eigenwerte hat. Einer davon sei λ, und es gelte

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E_n) = r - 1.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

I.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie für natürliches $n \geq 1$ die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1 + a_n \end{pmatrix},$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \text{ wobei } b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j, \\ 1 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

II.1 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Jordan-Normalform $\widetilde{A}$ der folgenden komplexen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie **alle** regulären komplexen Matrizen S an, für die $\widetilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

II.2 (4 Punkte)

Es sei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie alle Skalarprodukte des $\mathbb{R}^3$, für deren zugehörige Norm $\|\cdot\|$ die Gleichungen $\|\mathbf{e}_1\| = 2,\ \|\mathbf{e}_2\| = 1,\ \|\mathbf{e}_3\| = \sqrt{3}$ gelten und außerdem der Winkel zwischen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ bzw. $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ den Wert $\pi/3$ bzw. $\pi/6$ hat.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle Skalarprodukte mit den Eigenschaften aus a) die gleiche Norm hat.

c) Kann man in a) das Skalarprodukt so wählen, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ zueinander senkrecht sind?

II.3 (4 Punkte)

Es sei U ein Untervektorraum des euklidischen Standardvektorraums $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass es genau eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix A mit $A^2 = A$ gibt, für die U der Bildraum der linearen Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x},$$

ist.

II.4. (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V. Für alle Vektoren $\mathbf{v} \in V$ und alle Isometrien Ψ von V gelte die Gleichung

$$\|\Phi(\mathbf{v})\| = \|\Phi(\Psi(\mathbf{v}))\|.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$ gibt es eine Isometrie Ψ von V mit $\mathbf{v} = \Psi(\mathbf{w})$.

b) Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$ gilt $\|\Phi(\mathbf{v})\| = \|\Phi(\mathbf{w})\|$.

c) Wenn Φ nicht die Nullabbildung ist, dann existiert eine reelle Zahl λ derart, dass $\lambda\Phi$ eine Isometrie von V ist.

II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

α) Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus Ψ von V mit $\Phi = \Psi \circ \Psi$.

β) Es gibt einen Endomorphismus Δ von V mit $\Phi = \Delta^* \circ \Delta$.

γ) Φ ist selbstadjungiert und für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt $\langle \Phi(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \geq 0$.

II.6 (4 Punkte)

Geben Sie für die durch

$$Q_a : \quad 2a(1-a)x + (a^2 - a - 2)x^2 - ay^2 + a(1-a)z^2 = 0$$

definierte Quadrik Q_a in $\mathbb{R}^3$ die affine Normalform in Abhängigkeit vom reellen Parameter a an.

Lösungen zur Frühjahrsklausur in Linearer Algebra, 16.3.99

I.1.

Wir schreiben kurz 0,1,2,3,4 für die Elemente von $\mathbb{F}_5$. Alle 3-Tupel sind Elemente von G.
a) Es sind Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements und Invertierbarkeit jedes Elements nachzuweisen.
Assoziativität: $\big((a_1,a_2,a_3)\circ(b_1,b_2,b_3)\big)\circ(c_1,c_2,c_3) = (a_1+b_1+a_2b_3, a_2+b_2, a_3+b_3)\circ(c_1,c_2,c_3) = (a_1+b_1+c_1+a_2b_3+a_2c_3+b_2c_3, a_2+b_2+c_2, a_3+b_3+c_3)$.
$(a_1,a_2,a_3)\circ\big((b_1,b_2,b_3)\circ(c_1,c_2,c_3)\big) = (a_1,a_2,a_3)\circ(b_1+c_1+b_2c_3, b_2+c_2, b_3+c_3) = (a_1+b_1+c_1+a_2b_3+a_2c_3+b_2c_3, a_2+b_2+c_2, a_3+b_3+c_3)$.
Also ist $(G,\circ)$ assoziativ.

Neutrales Element: Wir versuchen, ein neutrales Element (b_1,b_2,b_3) zu finden:
$(a_1,a_2,a_3)\circ(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1+a_2b_3, a_2+b_2, a_3+b_3)\overset{!}{=}(a_1,a_2,a_3)$. Daraus folgt sofort, dass $b_1=b_2=b_3=0$ gelten muss und $(0,0,0)$ eine Rechtseins ist. Umgekehrt ist aber auch $(0,0,0)\circ(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)$, also $(0,0,0)$ das neutrale Element von $(G,\circ)$.

Inverses Element: Das Inverse Element (b_1,b_2,b_3) zu (a_1,a_2,a_3) muss die folgende Gleichung erfüllen:

$$(a_1+b_1+a_2b_3, a_2+b_2, a_3+b_3) = (0,0,0).$$

Dies bedeutet $b_2=-a_2, b_3=-a_3, b_1=-a_1+a_2a_3$. Tatsächlich gilt

$$(a_1,a_2,a_3)\circ(-a_1+a_2a_3,-a_2,-a_3) = (-a_1+a_2a_3,-a_2,-a_3)\circ(a_1,a_2,a_3) = (0,0,0).$$

Damit ist $(G,\circ)$ eine Gruppe.
Da $(0,1,0)\circ(0,0,1)=(1,1,1)\neq(0,1,1)=(0,0,1)\circ(0,1,0)$ gilt, ist diese Gruppe nicht kommutativ.

b) Es gilt $(a_1,a_2,a_3)^2 = (2a_1+a_2a_3, 2a_2, 2a_3)$, $(a_1,a_2,a_3)^4 = (2a_1+a_2a_3,2a_2,2a_3)^2 = (4a_1+a_2a_3, 4a_2, 4a_3) = (a_1,a_2,a_3)^{-1}$ laut a), also $(a_1,a_2,a_3)^5=(0,0,0)$.

I.2.

a) $\Rightarrow$: Wenn $u_1\in U_1, u_2\in U_2$, so gilt $u_1+u_2\in U_3 \iff u_2\in U_3$, da $u_1\in U_1\subseteq U_3$. Daher ist $(U_1+U_2)\cap U_3 = U_1+(U_2\cap U_3)$.
$\Leftarrow$: $U_1\subseteq U_1+(U_2\cap U_3) = (U_1+U_2)\cap U_3\subseteq U_3$.

b) $\Rightarrow$: Indirekter Beweis: Wäre V weder U_1 noch U_2, so gäbe es $u_1\in U_1,\ u_2\in U_2$ mit $u_1\notin U_2,\ u_2\notin U_1$. Da $V=U_1\cup U_2$ folgt $u_1+u_2\in U_1$ oder $u_1+u_2\in U_2$. Da U_1 und U_2 Untervektorräume sind, impliziert dies sofort $u_2\in U_1$ oder $u_1\in U_2$: Widerspruch.
$\Leftarrow$: klar.

I.3.

Es gilt

$$U_a = [\begin{pmatrix}1\\a\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-a\\2-a^2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\-1+a^2\\-1\\a^2-a+3\end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix}1\\a\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2-a\\1\\-3+2a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1-a\\0\\a^2-a\end{pmatrix}].$$

a) Es gilt $\mathbf{v} + U_a = \mathbf{w} + U_a$ genau dann, wenn $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ in U_a liegt, also Linearkombination der Erzeuger von U_a ist. Wir verwenden die Erzeuger, die wir eben angegeben haben.

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2-a \\ 1 \\ -3+2a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ 0 \\ a^2-a \end{pmatrix}.$$

Das ist gleichbedeutend mit $\kappa = -1, \lambda = 1$ und $\mu = \frac{6+2a}{1-a} = \frac{6-2a}{a^2-a}$. (Für $a = 0$ oder 1 kann die Gleichheit nicht auftreten.) Die letzte Gleichung führt zu $a = -1 \pm \sqrt{-2}$. Also gibt es keinen reellen Parameter a, für den die Klassen gleich werden.

b) Wenn die Klassen linear unabhängig sind, so hat U_a Dimension ≤ 2. Dem obigen Erzeugendensystem entnimmt man, dass dies genau für $a = 1$ der Fall ist. Der Vektorraum, der in diesem Fall von U_a, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ erzeugt wird, ist

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] = \mathbb{R}^4.$$

Also sind im Fall $a = 1$ die fraglichen Klassen tatsächlich linear unabhängig.

I.4

a) Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots v_n\} \subseteq M$ (wobei $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$) und für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i : \lambda_i = 0.$$

M heißt eine Basis, wenn sie linear unabhängig ist und den Vektorraum erzeugt, sich also jeder Vektor aus V auf eindeutige Art und Weise als Linearkombination der Elemente von M darstellen lässt.

b) $K = \mathbb{R}$:
$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ sind linear unabhängig und werden durch den dritten Standardbasisvektor zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt.
$K = \mathbb{F}_3$:
$\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind linear unabhängig, aber $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$. $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ bilden also eine Basis von $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, die durch den dritten und vierten Standardbasisvektor zu einer Basis von $\mathbb{F}_3^4$ ergänzt wird.

I.5

Es seien $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2, \ldots \lambda_r$ die Eigenwerte von A. K_i sei der Eigenraum zu λ_i. Es gilt $r - 1 = \text{Rang}(A - \lambda E_n) = n - \dim(K_1) \geq \sum_{i=2}^{r} \dim K_i \geq r - 1$, da die Eigenräume $H_2, \ldots, H_r$ mindestens eindimensional sind. Folglich gilt überall die Gleichheit und es muss $n = \sum_{i=1}^{r} \dim K_i$ gelten, also ist A diagonalisierbar.

I.6

Zieht man die letzte Zeile in A von allen anderen ab, so erhält man

$$\det\begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Wird hier wiederum für alle $i < n$ das a_i-fache der i-ten Zeile von der letzten abgezogen, so folgt $\det(A) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i$.
Setzt man in A alle a_i gleich -1, so erhält man die Matrix $-B$. Daraus folgt $\det(B) = (-1)^n \det(-B) = (-1)^n(1-n)$.

II.1

a) Das charakteristische Polynom von A ist $(X-1)^2(X-2)$. Der Rang von $A - E_3$ ist 2, so dass als Jordan-Normalform die Matrix

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gewählt werden kann.

b) Der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 ist $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Hauptraum von A zum Eigenwert 1 ist $[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$. Der Eigenraum von A zum Eigenwert 2 ist $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die Matrix S erfüllt genau dann die Bedingung, wenn die Spalten von S eine Jordanbasis von $\mathbb{C}^3$ bilden. Die erste Spalte muss also im Hauptraum von A zum Eigenwert 1 liegen, ohne Eigenvektor zu sein. Die zweite Spalte ist $A - E_3$ mal der ersten Spalte, die dritte Spalte ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Insgesamt:

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b+a & 2a & 2c \\ b & 2a & 0 \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{C}, \ ac \neq 0.$$

II.2

a) Wir beschreiben alle möglichen Skalarprodukte mit den geforderten Eigenschaften durch Angabe ihrer Gram-Matrix bezüglich der Standardbasis. Die Einträge der Gram-Matrix sind die Zahlen $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$. Bis auf $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$ sind diese durch die Vorgaben eindeutig festgelegt, denn der Cosinus des Winkels zwischen $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_j$ ist $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle / (\|\mathbf{e}_i\| \cdot \|\mathbf{e}_j\|)$. Es gilt $\cos \pi/3 =$

$1/2$, $\cos\pi/6 = \sin\pi/3 = \sqrt{3}/2$, wie man dem gleichseitigen Dreieck entnimmt. Daher ist die Gram-Matrix eine der Matrizen

$$G_a := \begin{pmatrix} 4 & 1 & a \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ a & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Diese Matrix beschreibt ein Skalarprodukt genau dann, wenn alle ihre Hauptminoren positiv sind. Diese sind 4, 3 und $a(3-a)$. Somit gibt es genau für $0 < a < 3$ ein Skalarprodukt mit den gewünschten Eigenschaften.

b) Die Norm des Vektors, den wir v nennen, ist immer $\sqrt{v^t G_a v} = \sqrt{3}$.

c) Das Skalarprodukt der Vektoren, die wir v und w nennen, ist $v^t G_a w = 12 - 6a$. Die Vektoren sind orthogonal genau denn, wenn das Skalarprodukt 0 ist, also wenn $a = 2$ gilt. Für $a = 2$ handelt es sich wegen a) tatsächlich um ein Skalarprodukt.

II.3

Die reelle Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn Φ selbstadjungiert ist (Beschreibung bezüglich einer ONB!). Mann muss also nur zeigen, dass es genau eine selbstadjungierte Abbildung Φ mit $\Phi^2 = \Phi$ und $\text{Bild}(\Phi) = U$ gibt.
Solch ein Φ muss dann Eigenwerte 0 und 1 haben (das Minimalpolynom von Φ teilt ja $X^2 - X$). Da es selbstadjungiert ist, sind die Eigenräume orthogonal zueinander und Φ ist die orthogonale Projektion auf U. Das gibt die Eindeutigkeit. Umgekehrt ist die orthogonale Projektion auf U selbstadjungiert mit $\Phi^2 = \Phi$, was die Existenz zeigt.

II.4

a) Ist $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, so nehmen wir für Ψ die Identität. Andernfalls verwenden wir die Spiegelung an der zu $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ orthogonalen Hyperebene:

$$\Psi(x) = x - 2\frac{\langle x, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle}{\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\rangle}(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

Das ist eine Isometrie, die $\mathbf{w}$ nach $\mathbf{v}$ abbildet, da beide Vektoren dieselbe Länge haben.

b) Verwende Ψ aus a) und folgere mit den Voraussetzungen $\|\Phi(\mathbf{w})\| = \|\Phi(\Psi(\mathbf{w}))\| = \|\Phi(\mathbf{v})\|$.

c) Sei Φ nicht die Nullabbildung. Alle Vektoren der Länge 1 werden dann wegen b) auf Vektoren einer festen Länge $1/\lambda$ abgebildet. Für das so bestimmte λ bildet die Abbildung $\lambda\Phi$ daher Vektoren der Länge 1 auf ebensolche ab, aus Linearitätsgründen bildet sie also jeden Vektor auf einen Vektor derselben Länge ab. Da $\lambda\Phi$ linear ist, ist $\lambda\Phi$ eine Isometrie.

II.5

$\alpha) \Rightarrow \beta)$: Wähle $\Delta = \Psi$.
$\beta) \Rightarrow \gamma)$: Für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt $\langle \Phi(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = \langle \Delta^* \circ \Delta(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = \langle \Delta(\mathbf{v}), \Delta(\mathbf{v})\rangle \geq 0$, da das Skalarprodukt positiv definit ist. Außerdem ist $\Phi^* = (\Delta^* \circ \Delta)^* = \Delta^* \circ \Delta = \Phi$.

$\gamma) \Rightarrow \alpha)$: Φ ist selbstadjungiert, also orthogonal diagonalisierbar. Sei Φ bezüglich der ONB $b_1, \ldots, b_n$ durch die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ beschrieben. Dann sind die a_i allesamt nicht negativ, denn $0 \le \langle \Phi(b_i), b_i \rangle = a_i \langle b_i, b_i \rangle = a_i$. Sei Ψ die bezüglich $b_1, \ldots, b_n$ durch $\operatorname{diag}(\sqrt{a_1}, \ldots \sqrt{a_n})$ beschriebene lineare Abbildung. Da Ψ bezüglich einer ONB durch eine reelle symmetrische Matrix beschrieben wird, ist Ψ selbstadjungiert. Selbstverständlich gilt $\Psi^2 = \Phi$.

II.6.

Die Nullstellen der Koeffizienten bei x^2 sind $a = -1$ oder 2, bei y^2 haben wir $a = 0$, und bei z^2 schließlich $a = 0$ oder 1. Die verschiedenen Fälle für die Normalform werden durch diese Nullstellen getrennt, und wir haben 9 Möglichkeiten:

$$
\begin{array}{lll}
a < -1 & : \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1 & : \text{einschaliges Hyperboloid,} \\
a = -1 & : \xi + \eta^2 - \zeta^2 = 0 & : \text{hyperbolisches Paraboloid,} \\
-1 < a < 0 & : \xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 = 1 & : \text{einschaliges Hyperboloid,} \\
a = 0 & : \xi^2 = 0 & : \text{Ebene,} \\
0 < a < 1 & : \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1 & : \text{einschaliges Hyperboloid,} \\
a = 1 & : \xi^2 + \eta^2 = 0 & : \text{Gerade,} \\
1 < a < 2 & : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 & : \text{Ellipsoid,} \\
a = 2 & : \xi - \eta^2 - \zeta^2 = 0 & : \text{elliptisches Paraboloid,} \\
a > 2 & : \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 1 & : \text{zweischaliges Hyperboloid.}
\end{array}
$$