UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
MATHEMATISCHES INSTITUT II

14. März 2000

Teil I der Diplom-Vorprüfung und der Zwischenprüfung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Fachrichtung: Semester:

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die **Nummer der Aufgabe** sowie **Ihren Namen** schreiben.
Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie die Sätze genau. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.

Zur Auswertung: „Bestanden“ haben Sie die Prüfung, wenn Sie in Teil I und Teil II zusammen 20 oder mehr Punkte erzielt haben. Dabei wird in jedem Teil diejenige Aufgabe, in der Sie am meisten Punkte erhalten haben, doppelt gewertet.

Punkte (Wird von den Prüfern ausgefüllt!)						max	Σ_I	Σ_{II}	Σ	**Note**

I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	
						⟸ Bitte kreuzen Sie **hier** an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.

Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es sei $R \neq \{0\}$ ein Ring mit Einselement, und für alle $x \in R$ gelte $x^2 = x$. Zeigen Sie:

(a) R ist kommutativ und für alle $x \in R$ gilt $2x = 0$.

(b) Ist R nullteilerfrei, so ist R der Körper mit zwei Elementen.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen $(2,2)$–Matrizen sei mit einer festen Matrix $A \in V$ die lineare Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} V & \longrightarrow V \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$$

definiert.

(a) Berechnen Sie zunächst für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(i) die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der geordneten Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

(ii) die Dimension und eine Basis von Kern Φ,

(iii) die Dimension und eine Basis von Bild Φ.

(b) Weisen Sie nach, dass Φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn A regulär ist.

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Gegeben sei für $a \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^5, \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$$

mit

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
y_1 & = & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & + & ax_6 \\
y_2 & = & & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 \\
y_3 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 \\
y_4 & = & & - & 2x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & + & a(a+1)x_5 & - & 2x_6 \\
y_5 & = & x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & (a+3)x_6 \ .
\end{array}$$

Bestimmen Sie für den Vektor $b = (1, 0, 1, a+1, 1)$ die Menge $\Phi^{-1}(\{b\})$ aller Urbilder in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und Φ ein Endomorphismus von V.

(a) Geben Sie eine Definition der Begriffe „Eigenwert" und „Eigenvektor" von Φ an.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Gilt $\Phi^2 = \Phi$, so hat Φ höchstens die Eigenwerte 0 und 1.

(ii) Hat Φ^2 den Eigenwert c^2, so hat Φ den Eigenwert c.

(iii) Ist Φ invertierbar und c Eigenwert von Φ, so ist c^{-1} Eigenwert von Φ^{-1}.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\Phi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung sowie c ein Eigenwert von Φ mit zugehörigem Eigenraum $U \subset V$, $U \neq V$. Weiter sei

$$\Psi : \begin{cases} V/U & \longrightarrow V/U \\ \boldsymbol{x} + U & \longmapsto \Phi(\boldsymbol{x}) + U \end{cases}$$

die von Φ auf V/U induzierte lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist Φ diagonalisierbar, so auch Ψ.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt nicht. Betrachten Sie hierzu die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Für $c = 0$ gilt: Ψ ist genau dann die Identität auf V/U, wenn Φ eine Projektion ist.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle (n,n)–Matrix $A_n = (\!(a_{ij})\!)$ mit den Einträgen

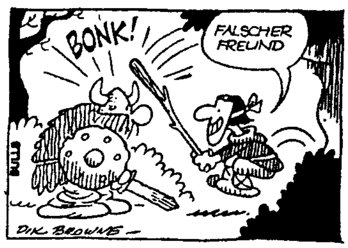
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } i = j-1, \\ j^2 & \text{für } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\det A_n$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei eine reelle (4,4)-Matrix A gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -1 & 1 \\ 1+a & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -a & 1+a \end{pmatrix}.$$



Das charakteristische Polynom von A ist $p = (x-1)^4$.

(a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ von A in Abhängigkeit von a.

(b) Geben Sie für den Fall $a = 0$ eine reguläre Matrix S an, so dass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}_i \rangle .$$

(b) Für alle Vektoren $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n \in V$ gilt:

$$\left(\det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{b}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{b}_n \rangle \end{pmatrix} \right)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es seien V ein n–dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ und Ψ selbstadjungierte Endomorphismen von V. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Bild $\Phi \subset$ Kern Ψ.

(ii) $\Phi \circ \Psi$ ist die Nullabbildung.

(iii) Bild $\Phi \perp$ Bild Ψ.

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) sei ein Endomorphismus Φ durch $\Phi(x) := Ax, x \in \mathbb{R}^4$, mit

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} a & -1 & -7 & -1 \\ 1 & a & -1 & 7 \\ 7 & -1 & a & 1 \\ -1 & -7 & -1 & a \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die Φ eine Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie für $a = 7$ die Normalform $\widetilde{A}$ der Isometrie Φ, sowie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ hat.

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Gilt für vier verschiedene Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ eines *euklidischen* Vektorraums

$$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|| \quad \text{und} \quad ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}|| = ||\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}||,$$

so sind die Vektoren $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}$ orthogonal.

(b) Die (a) entsprechende Aussage ist in *unitären* Vektorräumen falsch.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ der euklidische Standardvektorraum und Φ ein normaler, aber nicht injektiver Endomorphismus von V, für den

$$\Phi(\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad \Phi(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

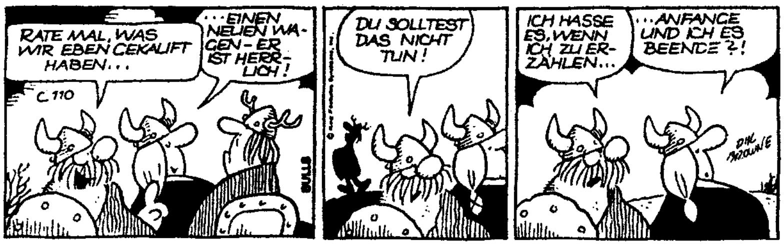
gilt.

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von V aus Eigenvektoren von Φ und geben Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B an.

Lösung I-1

(a) Für jedes $x \in R$ gilt $x + 1 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x + 2x + 1$.
Ziehe auf beiden Seiten $x + 1$ ab und erhalte $2x = 0$.
Für alle $x, y \in R$ gilt $x + y = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$
Addiere auf beiden Seiten $xy - x - y$ und erhalte $xy = 2xy + yx = yx$.

(b) Für jedes $x \in R$ gilt $x(x-1) = x^2 - x = x - x = 0$. Wenn R nullteilerfrei ist, folgt $x = 0$ oder $x - 1 = 0$, also $x \in \{0, 1\}$.



Lösung I-2

(a) (i) $B = (\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B_4})$

$$\Phi(B_1) = A \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B_1 - 2B_2$$

$$\Phi(B_2) = A \cdot B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -B_1 + 2B_2$$

$$\Phi(B_3) = A \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = B_3 - 2B_4$$

$$\Phi(B_4) = A \cdot B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -B_3 + 2B_4$$

Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B lautet also:

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) $\mathrm{Rg} A_\Phi = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Kern}\Phi = 4 - 2 = 2$.
Sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt $\Phi(X) = 0 \Leftrightarrow A \cdot X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ -2a + 2c & -2b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Also $\mathrm{Kern}\Phi = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in I\!R\} = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$.

(iii) $\dim \mathrm{Bild}\Phi = \mathrm{Rg} A_\Phi = 2$.
$\mathrm{Bild}\Phi = [\Phi(B_1), \Phi(B_2), \Phi(B_3), \Phi(B_4)] = [B_1 - 2B_2, B_3 - 2B_4] = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}]$.

(b) Φ Isomorphismus $\underset{\substack{\Phi \text{ linear} \\ \dim V < \infty}}{\iff}$ Φ injektiv $\iff AX = 0$ ist nur trivial lösbar

$\iff$ die hom. LGSe $A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind nur trivial lösbar

$\iff A$ reguläre Matrix.

Lösung I-3

$\Phi^{-1}(\{b\})$ ist die Lösungsmenge des LGS $Ax = {}^t b$ (transponiert, da in Aufgabe mit Zeilenvektoren gearbeitet wird). Die (erweiterte) Matrix des LGS wird mit Gauss-Algorithmus umgeformt, bis die Lösung ersichtlich ist:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 & 6 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & a(a+1) & -2 & a+1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & a+3 & 1 \end{array}\right) \overset{I-3III,\ V-III,\ I\leftrightarrow III}{\rightsquigarrow}$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & a-3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & a(a+1) & -2 & a+1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & a+2 & 0 \end{array}\right) \overset{IV+2II,\ V-II}{\rightsquigarrow}$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & a-3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(a+1) & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right) \overset{V-2III,\ III\leftrightarrow V}{\rightsquigarrow}$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & a-3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & a-7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(a+1) & 0 & a+1 \end{array}\right)$$

Der Rang der Matrix/erweiterter Matrix sind also

$$\begin{array}{lcl} a = & 0 & : \ 4/5 \\ a = & -1 & : \ 4/4\ . \\ a \neq & 0,-1 & : \ 5/5 \end{array}$$

Laut Vorlesung ist das LGS unlösbar, d.h. $\Phi^{-1}(\{b\}) = \emptyset$, genau für $a = 0$. Sei jetzt $a \neq 0$.
Lt. Vorlsung hat der Lösungsraum die Form KernΦ + spezielle Lsg.
Eine spez. Lsg mit $x_6 = 0$ kommt aus dem LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(a+1) & a+1 \end{array}\right), \text{ also } \begin{array}{l} x_5 = \frac{1}{a} \\ x_4 + 6x_5 = -4 \Rightarrow x_4 = -4 - \frac{6}{a} \\ x_3 = -2 - x_4 - 3x_5 = 2 + \frac{6}{a} - \frac{3}{a} = 2 + \frac{3}{a} \\ x_2 = -2x_3 - x_4 = 4 + \frac{6}{a} - 4 - \frac{6}{a} = 0 \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_5 + 1 = -2 - \frac{3}{a} - \frac{1}{a} + 1 = -1 - \frac{4}{a} \end{array}$$

also $\tilde{b}_0 = (-1 - \frac{4}{a}, 0, 2 + \frac{3}{a}, -4 - \frac{6}{a}, \frac{1}{a}, 0) \in \Phi^{-1}(\{b\})$

Schließlich ist noch der Nullraum der folgenden Matrix zu berechnen (wegen $a \neq 0$ kann die letzte Zeile durch a dividiert werden).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & a-7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I-II,\ II-2III,\ III-IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -2a+7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & a-7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I+IV,\ II+IV}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 & a-7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & a-7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \overset{I+III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & a-7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $a+1 \neq 0$ ist, hat die Matrix Rang 5, also $\dim \mathrm{Kern}\Phi = 6 - \mathrm{Rg}(A) = 1$, und $x_5 = 0$. Dann kann $x_6 = t$ (beliebig in $\mathbb{R}$) verwendet werden.

$x_6 = t$
$x_4 = (7-a)t$
$x_3 = -4t,$
$x_2 = at$
$x_1 = (3-a)t$
also $\mathrm{Kern}\Phi = [(3-a, a, -4, 7-a, 0, 1)]$, dem nach $(a \neq 0, 1)$ $\Phi^{-1}(\{b\}) = \tilde{b}_0 + [(3-a, a, -4, 7-a, 0, 1)]$

verbleibt $a = -1$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Hier ist $\dim \mathrm{Kern}\Phi = 6 - \mathrm{Rg}(A) = 2, x_5, x_6$ können beliebig vorgeschrieben werden.
$x_5 = 0, x_6 = 1$ gibt $x_4 = 8, x_3 = -4, x_2 = -1, x_1 = 4$,
also $b_1 = (4, -1, -4, 8, 0, 1) \in \mathrm{Kern}\Phi$.
$x_5 = 1, x_6 = 0$ gibt $b_2 = (-4, 0, 3, -6, 1, 0) \in \mathrm{Kern}\Phi$,
beide linear unabhängig. Also $\mathrm{Kern}\Phi = [b_1, b_2]$ und $\Phi^{-1}(\{b\}) = \tilde{b}'_0 + [b_1, b_2]$, $\tilde{b}'_0(-1) = (3, 0, -1, 2, -1, 0)$.

Lösung I-4

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von Φ, wenn ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v.$$

$v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein Eigenvektor von Φ, wenn ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert mit

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v.$$

(b) (i) Die Aussage ist wahr.
<u>Erste Beweisvariante:</u> Da $\Phi^2 = \Phi$ gilt ist $T^2 - T$ ein annullierendes Polynom von Φ. Alle Eigenwerte von Φ müssen daher Nullstellen von $T^2 - T$ sein, also $\in \{0, 1\}$.
<u>Zweite Beweisvariante:</u> Es sei λ ein EW von Φ, $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum EW λ.
Es gilt: $\lambda^2 v = \Phi^2(v) = \Phi(v) = \lambda v$, also $(\lambda^2 - \lambda)v = 0$.
Da $v \neq 0$ vorausgesetzt ist, folgt $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda \in \{0, 1\}$

(ii) Die Aussage ist falsch (für allgemeine Körper).
Wähle z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}$, $\Phi : V \to V, v \mapsto v$. Dann hat Φ^2 den Eigenwert $1 = (-1)^2$, aber Φ hat nicht den Eigenwert -1.
<u>Zusatz:</u> Ist c^2 EW von Φ^2, so ist c oder $-c$ EW von Φ. Denn:
c^2 ist EW von $\Phi^2 \iff \Phi^2 - c^2\mathrm{id} = (\Phi - c\mathrm{id})(\Phi + c\mathrm{id})$ ist nicht injektiv
$\Rightarrow \Phi - c\mathrm{id}$ oder $\Phi - c\mathrm{id}$ ist nicht injektiv

(iii) Die Aussage ist wahr.
Ist nämlich c EW von Φ und $v \neq 0$ EV zu c, so gilt zunächst $c \neq 0$, da $\Phi(v) \neq 0$.
Es gilt aber $v = \Phi^{-1}(\Phi(v)) = \Phi^{-1}(cv)$, also $c^{-1}v = \Phi^{-1}(v)$,
also ist v EV zum EW c^{-1} für Φ^{-1}.

Lösung I-5

(a) ϕ diag $\Rightarrow$ es ex. eine Basis $(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, .., x_n)$ von V aus Eigenvektoren von ϕ. Dabei seien $x_{k+1}, .., x_n \in U$ und $x_1, x_2, ..., x_k \notin U$.
Dann ist $(x_1 + U, ..., x_k + U)$ eine Basis von V/U aus Eigenvektoren von ψ, denn

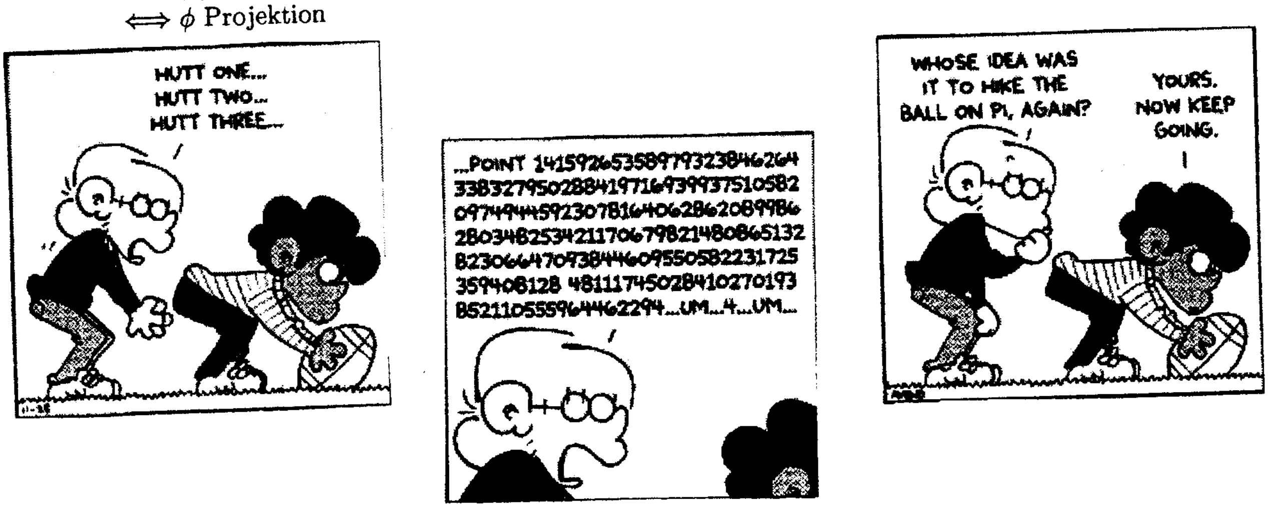
$$\psi(x_i + U) = \phi(x_i) + U = c_i x_i + U = c_i(x_i + U); \quad i = 1, ..., k.$$

Somit ist ψ diagonalisierbar.

(b) Sei $V := I\!R^2$,
$\phi : I\!R^2 \to I\!R^2, \phi(x) = Ax$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $c = 1$ einziger EW von ϕ und $U = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \neq I\!R^2$ zugehöriger Eigenraum, also ist ϕ nicht diagonalisierbar.

Oder: die Abb.matrix A von ϕ hat eine JNF, die keine Diagonalmatrix ist, d.h. A und damit ϕ ist nicht diagonalisierbar.
$\dim V/U = 2 - 1 = 1.$ $\Rightarrow \psi : V/U \to V/U$ ist trivialerweise diagonalisierbar.

(c) $c = 0 \Rightarrow U = \mathrm{Kern}\phi$. Dann gilt:
$\psi = \mathrm{id}_{V/U} \iff \psi(x + \mathrm{Kern}\phi) = x + \mathrm{Kern}\phi \quad \forall x \in V \iff \phi(x) + \mathrm{Kern}\phi = x + \mathrm{Kern}\phi \quad \forall x \in V$
$\iff \phi(x) - x \in \mathrm{Kern}\phi \quad \forall x \in V \iff \phi(\phi(x) - x) = x \quad \forall x \in V \iff \phi^2(x) = \phi(x) \quad \forall x \in V$
$\iff \phi$ Projektion



Lösung I-6

Die Matrizen haben die folgende Form:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-2)^2 & & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & (n-1)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \det A_1 &= 1 \\ \det A_2 &= 1 \cdot 2 = 2! \\ \det A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 = 6 = 3! \\ \det A_4 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2^2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \det A_3 + 3^2 \det A_2 = 6 + 9 \cdot 2 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! \end{aligned}$$

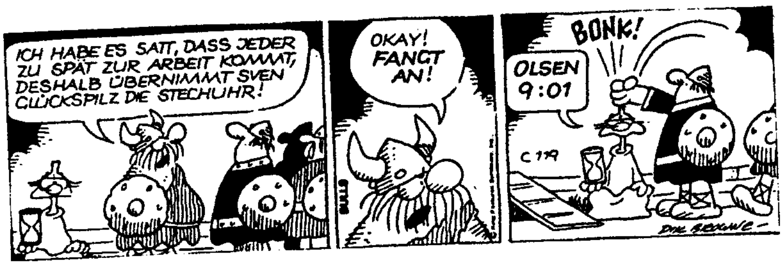
Behauptung: $\det A_n = n!$

Beweis mittels vollst. Induktion.
IA: für $n = 1, 2, 3, 4$ oben durchgeführt
IV:det $A_k = k!$ gilt für alle $k \leq n$
IS: durch Entwicklung nach der letzten Spalte von A_{n+1} wird gezeigt, dass $\det A_{n+1} = (n+1)!$.

$$A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-1)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (n)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-2)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (n-1)^2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & (n-2)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \det A_n + n^2 \cdot \det A_{n-1} = n! \cdot (1+n) = (n+1)!$$



Lösung II-1

(a) Für das charakteristische Polynom von A gilt also $p(x) = (x-1)^4$. Damit hat Agenau den EW $\lambda = 1$ und die JNF von A besteht aus genau einem Jordanblock der Länge 4.
Betrachte nun die Dimension des Eigenraums E_1:

$$\operatorname{Rg}(A-E) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & -a & a \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fall 1: $a = 0$
Dann ist $\dim E_1 = \dim \operatorname{Kern}(A-E) = 4 - \operatorname{Rg}(A-E) = 2$. Es gibt also 2 Jordankästchen(JK).

Weiter ist $\operatorname{Rg}\,(A-E)^2 = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \operatorname{Rg}(A-E)^3 = \operatorname{Rg} 0 = 0.$

Damit hat der Hauptraum H_1 den Index $s = 3$; dies ist die Länge des grössten auftretenden Jordankästchens in der JNF $\widetilde{A}$. Somit ist

$$\widetilde{A}_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

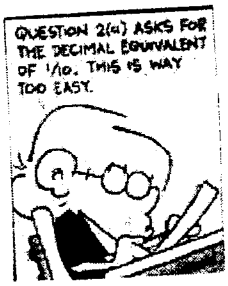
Fall 2: $a = -1$
Es ist in diesem Fall $\dim E_1 = \dim \mathrm{Kern}(A-E) = 4 - \mathrm{Rg}(A-E) = 2$, es gibt also 2 JK. Ferner ist $\mathrm{Rg}\ (A-E)^2 = \mathrm{Rg}\ 0 = 0$. Damit hat der Hauptraum H_1 zum Eigenwert $\lambda = 1$ den Index $s = 2$. Dies ist die Länge des grössten auftretenden JK. Da der Jordanblock aus 2 JK besteht, folgt somit

$$\widetilde{A}_{a=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fall 3: $a \notin \{0,1\}$
Dann gilt $\dim E_1 = \dim \mathrm{Kern}(A-E) = 4 - \mathrm{Rg}(A-E) = 1$. Es gibt genau ein JK, das notwendigerweise die Länge 4 besitzt. Damit ist

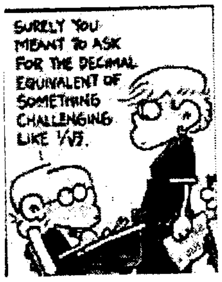
$$\widetilde{A}_{a\notin\{0,1\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $E_1 = \mathrm{Kern}(A-E) = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]$,



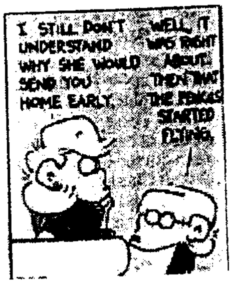
$$U_2 = \mathrm{Kern}(A-E)^2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}], H_1 = \mathrm{Kern}(A-E)^3 = I\!R^4.$$

Wähle $\vec{b_1} \in H_1 \setminus U_2$, also z.B. $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit sind die Vektoren $\vec{b_2}$ und $\vec{b_3}$ einer zu bestimmenden Jordanbasis festgelegt durch $\vec{b_2} = (A-E)\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_3} =$



$$(A-E)\vec{b_2} = (A-E)^2\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ergänze nun noch $\vec{b_3} \in E_1$ zu einer Basis von E_1, zum Beispiel durch $\vec{b_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Damit ist durch $\widetilde{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4}\}$ eine Jordanbasis gegeben. Die reguläre Matrix

$$S = (\vec{b_1}|\vec{b_2}|\vec{b_3}|\vec{b_4}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

leiste das Gewünschte.

Lösung II-2

(a) Seien $x, y \in V$ beliebig. Dann gilt $y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, b_i \rangle b_i$, da $\{b_1, ..., b_n\}$ ONB ist.
Es folgt $\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle y, b_i \rangle b_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle \langle y, b_i \rangle$.

(b) Zunächst folgt $\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, b_k \rangle \langle v_j, b_k \rangle$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$. (*)

Sei $A := \begin{pmatrix} \langle v_1, b_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, b_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, b_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, b_n \rangle \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$.

Mit (*) ergibt sich $A \cdot A^\top = B$ und damit $(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^\top = \det(A \cdot A^\top) = \det B$.

Lösung II-3

Beweis durch Ringschluß: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i).

Vormerkung: Aussage (i) ist quivalent zu $\Psi \circ \Phi = 0$. (V)

(i)$\Rightarrow$(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\langle \Phi \circ \Psi(x), y\rangle \underset{\Phi \text{ s.a.}}{=} \langle \Phi(x), \Psi(y)\rangle \underset{\Psi \text{ s.a.}}{=} \langle x, \Psi(\Phi(y))\rangle = \langle x, \Psi \circ \Phi(y)\rangle \underset{\text{(i) bzw. (V)}}{=} 0$$

$$\underset{\substack{\text{setze } y := (\Phi \circ \Psi)(x) \\ \langle \cdot,\cdot\rangle \text{ ist pos.def.}}}{\Rightarrow} (\Phi \circ \Psi)(x) = 0 \underset{x \in V \text{ bel.}}{\Rightarrow} \Phi \circ \Psi = 0$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Für alle $x, y \in V$ gilt nach (ii) $\langle \Psi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, \underbrace{(\Phi \circ \Psi)}_{=0}(y)\rangle = 0$

$$\underset{x,y \text{ bel.}}{\Rightarrow} \mathrm{Bild}\Phi \perp \mathrm{Bild}\Psi.$$

(iii)$\Rightarrow$(i) z.zg. ist nach (V) $\Psi(\Phi(x)) = 0 \quad \forall x \in V$.

Beweis: Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle \Psi(\Phi(x)), y\rangle = \langle \Psi(x), \Phi(y)\rangle \underset{\text{(iii)}}{=} 0$.

$$\underset{\text{setze } y := \Psi(\Phi(x))}{\Rightarrow} \Psi(\Phi(x)) = 0 \Rightarrow \text{Beh.}$$

Lösung II-4

(a) Beh: Φ Isometrie $\Leftrightarrow a = 7$

Bew: "$\Rightarrow$" Sei Φ Isometrie. Dann stehen die Spalten s_1, s_2, s_3, s_4 von A aufeinander senkrecht; insbesondere $0 = \langle s_1, s_4\rangle = -a + 7 + 7 - a \Rightarrow a = 7$.

"$\Leftarrow$" $a = 7 \Rightarrow AA^\top = E_4 \Rightarrow \Phi$ Isometrie.

(b) $B := A + A^T = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Sei p das char. Polynom von B.

$$p(x) = \det(B - xE_4) = \frac{1}{5^4} \begin{vmatrix} 7-5x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7-5x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7-5x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 7-5x \end{vmatrix} = \frac{1}{5^4} \begin{vmatrix} 7-5x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7-5x & -1 & 0 \\ 0 & 6-5x & 6-5x & 0 \\ 6-5x & 0 & 0 & 6-5x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5^4}(6-5x)^2 \begin{vmatrix} 7-5x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7-5x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^4}(6-5x)^2 \begin{vmatrix} 8-5x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8-5x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{5^4}(6-5x)^2(8-5x)^2 \Rightarrow$ EW.e von B sind $\frac{6}{5}$ und $\frac{8}{5}$ (beide doppelte NS)

$$\Rightarrow \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right), \quad \text{da} \quad \sqrt{1 - (\tfrac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}.$$

<u>Beweis dazu:</u> Eigenraum von B zum EW. $\frac{6}{5}$:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenraum ist } [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

$$x_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_2 = Ax_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \widetilde{x}_2 := y_2 - \langle x_1, y_2\rangle x_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (\text{ bel.} \in [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]^\perp)$$

$$y_4 := Ax_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \widetilde{x}_4 := y_4 - \langle x_3, y_4\rangle x_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bezüglich der geord. Basis $(x_1, .., x_4)$ nimmt Φ die NF $\widetilde{A}$ an.

Lösung II-5

(a) Es gelte $||a-b|| = ||b-c||$ und $||a-d|| = ||d-c||$.

$$
\begin{aligned}
& ||a-b|| = ||b-c|| \\
\Longleftrightarrow\ & ||a-b||^2 = ||b-c||^2 \\
\Longleftrightarrow\ & ||a||^2 - 2\langle a,b\rangle + ||b||^2 = ||b||^2 - 2\langle b,c\rangle + ||c||^2 \\
\Longleftrightarrow\ & ||a||^2 - 2\langle a,b\rangle + 2\langle b,c\rangle - ||c||^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & ||a||^2 - 2\langle b, a-c\rangle - ||c||^2 = 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Analog: $||a-d|| = ||d-c|| \Leftrightarrow ||a||^2 - 2\langle d, a-c\rangle - ||c||^2 = 0 \quad (2)$

Die Differenz (1) – (2) lautet:

$$
\begin{aligned}
& -2\langle b, a-c\rangle + 2\langle d, a-c\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & -\langle b-d, a-c\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (b-d) \perp (a-c)
\end{aligned}
$$

(b) Einfachstes Beispiel ist im VR $V = \mathbb{C}^1$ über $\mathbb{C}$ mit dem Standartskalarprodukt $\langle z,w\rangle = z\overline{w}, z,w \in \mathbb{C}^1$. Setze $a := 1, b := i, c := -1, d := -i$.
$||a-b|| = |1-i| = \sqrt{2} = |1+i| = ||b-c||$
$||a-d|| = |1+i| = \sqrt{2} = |1-i| = ||d-c||$
Aber $\langle a-c, b-d\rangle = (1+1)\overline{(i+i)} = -4i \neq 0 \Rightarrow (a-c) \not\perp (b-d)$.

Lösung II-6

Φ ist diagonalisierbar, da normal.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von Φ. Der zugehörige Eigenwert ist $\neq 0$, da

$\Phi([\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}]) = [\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}]$. Also ist $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(\Phi)$. Da auch $\begin{pmatrix} 3\\4\\-\pi \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} -5\\4\\1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(\Phi)$

gilt, liegt auch $\begin{pmatrix} 3\\4\\0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Bild}(\Phi)$. Daher ist $\mathrm{Rang}(\Phi) \geq 2$. Da $\mathrm{Rang}(\Phi) < 3$ gilt, ist $\mathrm{Rang}(\Phi) = 2$.

$\mathrm{Bild}(\Phi)$ wird von den orthogonalen Vektoren $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\4\\0 \end{pmatrix}$ erzeugt. Da $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ EV ist, muß

auch $\begin{pmatrix} 3\\4\\0 \end{pmatrix}$ ein EV von Φ zu einem von 0 verschiedenen EW sein. Da der Kern von Φ das

Orthogonalelement zu $\mathrm{Bild}(\Phi)$ ist, wird er erzeugt von $\begin{pmatrix} -4\\3\\0 \end{pmatrix}$.

Eine ONB aus Eigenvektoren besteht daher aus $v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4\\3\\0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3\\4\\0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$.

Was sind die EWe? Wir nennen sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dabei ist $\lambda_1 = 0$.

Nun gilt: $\begin{pmatrix} -5\\4\\11 \end{pmatrix} = \frac{32}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 + 11v_3$. Auf diese Gleichung wenden wir Φ an:

$$5v_2 + (-\pi)v_3 = \begin{pmatrix} 3\\4\\-\pi \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} -5\\4\\11 \end{pmatrix} = 0 + \frac{\lambda_2}{5}v_2 + 11 \cdot \lambda_3 v_3. \Rightarrow \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -\frac{\pi}{11}.$$

Die Matrix von Φ bezüglich $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist daher $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 25 & \\ & & -\frac{\pi}{11} \end{pmatrix}$.