

## Aufgabe 1

Es seien  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  und  $U := [e_2, e_3]$  der von  $e_2, e_3$  erzeugte Untervektorraum.

Weiter sei

$$G := \{A \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) \mid A \cdot e_1 = e_1 \text{ und } A \cdot U \subset U\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $G$  eine Untergruppe von  $\mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$  ist.  
(b) Geben Sie einen Isomorphismus von Gruppen  $\Phi : \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow G$  an.

*Erinnerung:*  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  bezeichnet die Gruppe der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen.

---

## Lösung:

- (a) • Die Einheitsmatrix  $E_3$  lässt alle Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  fest, also insbesondere  $e_1$  und  $U$ . Somit ist  $E_3 \in G$ .  
• Für  $A, B \in G$  gilt

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot e_1 &= A \cdot (B \cdot e_1) = A \cdot e_1 = e_1, \\ (A \cdot B) \cdot U &= A \cdot (B \cdot U) \subset A \cdot U \subset U.\end{aligned}$$

Somit ist auch  $A \cdot B \in G$ .

- Weiter gilt für  $A \in G$ :

$$e_1 = E_3 \cdot e_1 = A^{-1} \cdot A \cdot e_1 = A^{-1} \cdot e_1.$$

Nun sei  $u \in U$  und

$$A^{-1} \cdot u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3.$$

Da  $A \cdot e_1 = e_1$ , folgt nun

$$u = E_3 \cdot u = A \cdot A^{-1} \cdot u = \alpha e_1 + \beta A \cdot e_2 + \gamma A \cdot e_3 \in U = [e_2, e_3],$$

also  $\alpha = 0$ . Somit gilt auch

$$A^{-1} \cdot u = \beta e_2 + \gamma e_3 \in U,$$

also  $A^{-1} \cdot U \subset U$  und insgesamt  $A^{-1} \in G$ .

- (b) Zunächst überlegen wir uns, wie die Matrizen  $A \in G$  aussehen.

Die Bedingung  $A \cdot e_1 = e_1$  schreibt sich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich  $a_{11} = 1$  und  $a_{21} = a_{31} = 0$ .

Die Bedingung  $A \cdot U \subset U$  schreibt sich damit als

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ a_{22}\beta + a_{23}\gamma \\ a_{32}\beta + a_{33}\gamma \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in U$$

für beliebige  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Somit gilt  $a_{12} = a_{13} = 0$ .

Also ist  $A \in G$  von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (*)$$

und da  $\det(A) \neq 0$  vorausgesetzt wird, ist  $a_{22}a_{32} - a_{23}a_{33} \neq 0$ .

Nun definieren wir die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

- Dann ist  $\Phi(B)$  invertierbar für alle  $B \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ , da

$$\det(\Phi(B)) = 1 \cdot \det(B) \neq 0.$$

Außerdem gilt offensichtlich

$$\Phi(B) \cdot e_1 = e_1, \quad \Phi(B) \cdot e_2 = ae_2 + ce_3, \quad \Phi(B) \cdot e_3 = be_2 + de_3 \in U.$$

Also Bild  $\Phi \subset G$ .

- $\Phi$  ist ein Homomorphismus von Gruppen:

$$\Phi(A_1) \cdot \Phi(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & A_1 & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & A_2 & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & A_1 \cdot A_2 & \\ & & \end{pmatrix} = \Phi(A_1 \cdot A_2).$$

- $\Phi$  ist surjektiv: Für  $A \in G$  in der Form (\*) ist  $B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  ein Urbild unter  $\Phi$ .
  - $\Phi$  ist injektiv: Das folgt sofort aus der Abbildungsvorschrift für  $\Phi$ .
-

## Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Untervektorräume  $U, W$  des  $\mathbb{R}^4$ ,

$$U = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad W = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von  $U \cap W$ .  
(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von  $U + W$ .
- 

### Lösung:

- (a) Jeder Vektor im Schnitt muss sich als Linearkombination sowohl der Erzeuger von  $U$  als auch der Erzeuger von  $W$  schreiben lassen. Also setze an:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit Unbekannten  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Schreibe dies als LGS und löse mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Daraus lesen wir  $\beta_1 = 1, \beta_2 = -1$  ab, und somit wird der Schnitt erzeugt von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist  $\dim U \cap W = 1$ .

- (b) Aus dem LGS (\*) lesen wir ab, dass die erste, zweite und dritte Spalte linear unabhängig sind. Somit bilden sie eine Basis von  $U + W$ :

$$U + W = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

---

### Aufgabe 3

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $V^*$  der Dualraum von  $V$ .

Für einen Untervektorraum  $U$  von  $V$  definieren wir

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Zeigen Sie:

- (a)  $U^0$  ist ein Untervektorraum von  $V^*$ .
- (b) Für Untervektorräume  $U, W$  von  $V$  gilt:
  - (i)  $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$ .
  - (ii)  $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$ .

### Lösung:

- (a) Die 0-Abbildung ist ein Element von  $U^0$ .

Für  $\varphi, \psi \in U^0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und beliebiges  $u \in U$  gilt

$$(\lambda\varphi + \mu\psi)(u) = \lambda\varphi(u) + \mu\psi(u) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

also  $\lambda\varphi + \mu\psi \in U^0$ . Somit ist  $U^0$  ein Untervektorraum von  $V^*$ .

- (b) (i) Ist  $\varphi(u + w) = 0$  für alle  $u \in U, w \in W$ , so gilt insbesondere  $\varphi(u + 0) = 0 = \varphi(0 + w)$ . Umgekehrt folgt aus der Linearität von  $\varphi$ , dass  $\varphi(u) = 0 = \varphi(w)$  auch  $\varphi(u + w)$  zur Folge hat. Also gilt:

$$\begin{aligned}(U + W)^0 &= \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u + w) = 0 \text{ für alle } u \in U, w \in W\} \\ &= \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0, \varphi(w) = 0 \text{ für alle } u \in U, w \in W\} \\ &= \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \cap \{\varphi \in V^* \mid \varphi(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\ &= U^0 \cap W^0.\end{aligned}$$

- (ii) „ $\supseteq$ “: Für  $\varphi \in U^0$  gilt insbesondere  $\varphi(x) = 0$  für alle  $x \in U \cap W$ . Also  $U^0 \subset (U \cap W)^0$ . Analog  $W^0 \subset (U \cap W)^0$ . Somit ist  $U^0 \cup W^0 \subset (U \cap W)^0$ , und da letzteres ein Vektorraum ist, gilt auch

$$U^0 + W^0 = [U^0 \cup W^0] \subseteq (U \cap W)^0.$$

„ $\subseteq$ “: Sei  $\varphi \in (U \cap W)^0$ . Mittels linearer Fortsetzung können wir folgende lineare Abbildung definieren

$$\varphi_U(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in V \setminus U \\ 0, & x \in U \end{cases}.$$

Es ist  $\varphi_U \in U^0$ . Dann ist  $\varphi_W := \varphi - \varphi_U \in W^0$  und somit

$$\varphi = \varphi_U + \varphi_W \in U^0 + W^0,$$

und da  $\varphi$  beliebig gewählt war, gilt  $(U \cap W)^0 \subseteq U^0 + W^0$ .

## Aufgabe 4

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta & \alpha \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  abhängig von  $\alpha$  und  $\beta$ .  
(b) Sei nun  $\beta = 2$ . Bestimmen Sie die Eigenräume von  $A$  abhängig von  $\alpha$ .
- 

### Lösung:

- (a) Bestimme das charakteristische Polynom  $p_A$  von  $A$ :

$$p_A = \det(A - X E_3) = \det \begin{pmatrix} -3 - X & 0 & 0 \\ 2\alpha & \beta - X & \alpha \\ 10 & 0 & 2 - X \end{pmatrix} = (-3 - X)(\beta - X)(2 - X).$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen von  $p_A$ , also

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \beta, \quad \lambda_3 = 2.$$

Falls  $\beta \neq 2, -3$  sind alle Eigenwerte einfach.

- (b) Für  $\beta = 2$  ist 2 ein doppelter Eigenwert von  $A$ , der Eigenraum von  $A$  kann also Dimension 1 oder 2 haben.

- (i) Bestimme den Eigenraum  $E(2) = \text{Kern}(A - 2 \cdot E_3)$ :

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 0 & \alpha \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für  $\alpha = 0$  ist der Rang dieser Matrix 1 und der Eigenraum ist

$$E(2) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Für  $\alpha \neq 0$  ist der Rang 2, der Eigenraum ist

$$E(2) = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

- (ii) Bestimme den Eigenraum  $E(-3) = \text{Kern}(A + 3 \cdot E_3)$ :

$$A + 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 5 & \alpha \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum ist (unabhängig von  $\alpha$ )

$$E(-3) = \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

---

## Aufgabe 5

Es sei  $A_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Matrix mit den Koeffizienten

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie  $\det(A_1)$ ,  $\det(A_2)$ ,  $\det(A_3)$  und  $\det(A_4)$ .

(b) Zeigen Sie:

$$\det(A_n) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1).$$

## Lösung:

Die Matrix  $A_n$  sieht folgendermaßen aus:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a)  $\det(A_1) = \det(0) = 0$ .

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2.$$

$$\det(A_4) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^3 \cdot 3 = -3.$$

(b) Inspiriert durch das Vorgehen bei  $\det(A_4)$  lösen wir den allgemeinen Fall mit den folgenden Umformungen:

1. Subtrahiere die  $n$ -te Zeile jeweils von den Zeilen 1 bis  $n-1$ :

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Addiere die Spalten 1 bis  $n-1$  jeweils zur  $n$ -ten Spalte:

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

3. Nun liegt eine untere Dreiecksgestalt vor, d.h. die Determinante kann als Produkt der Diagonalelemente abgelesen werden:

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n-1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1).$$

---