Wieners

Numerische Mathematik 1

Dauer: 120 min. Lösung: keine

Aufgabe 1 **19 = 2+2+3+(1+1)+(1+1+2)+3+(1+2) Punkte**

a) Berechnen Sie die Anzahl der arithmetischen Operationen der LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

unter der Voraussetzung, dass die LR-Zerlegung $A = LR$ existiert.

b) Berechnen Sie $\|A\|_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine reguläre Diagonalmatrix mit Einträgen a_{nn}.
Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ bezüglich der Spektralnorm.

d) (i) Erklären Sie kurz, warum die die Auswertung des Terms $\frac{1}{1+5x} - \frac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$ in Gleitkommaarithmetik problematisch ist.

(ii) Formen Sie den Term so um, dass das Problem vermieden wird.

e) Wir betrachten den QR-Algorithmus mit variablem Shift zur simultanen Berechnung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

(i) Geben Sie an, wie die Startmatrix A_0 gewählt wird.

(ii) Geben Sie an, wie in der k-ten Iteration aus der Matrix A_k und dem Shift μ_k die Matrix A_{k+1} berechnet wird.

(iii) Zeigen Sie, dass alle Iterierten A_k dieselben Eigenwerte besitzen.

f) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ regulär.
Zeigen Sie: Wenn $\rho(I_N - BA) \geq 1$ gilt, dann gibt es $x^0, b \in \mathbb{C}^N$, sodass das Iterationsverfahren

$$x^{k+1} = x^k + B(b - Ax^k)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots\,,$$

nicht gegen $A^{-1}b$ konvergiert.

g) Sei $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$.

(i) Zeigen Sie die Gleichung $\|A\|_\mathrm{F}^2 = \operatorname{spur} A^\top A$ für die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_\mathrm{F}$.

(ii) Zeigen Sie mithilfe der Singulärwertzerlegung, dass $\|A\|_\mathrm{F}^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_R^2$ gilt, wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_R > 0$ die Singulärwerte von A seien.

Aufgabe 2 **(Gerschgorin)** **6 = 2+4 Punkte**

a) Formulieren Sie den Satz von Gerschgorin für $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

b) Zeigen Sie, dass der Imaginärteil aller Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 3 & 2 \\ 2 & 0.5 & 0.5 & 217 \end{pmatrix}$$

betragsmäßig kleiner oder gleich 1 ist, ohne die Eigenwerte auszurechnen.

Aufgabe 3 **(Givensrotation)** **6 = 2+2.5+1.5 Punkte**

a) Eine QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sei bekannt.

Erklären Sie, wie das LGS $Ax = b \in \mathbb{R}^N$ mithilfe der QR-Zerlegung gelöst werden kann und geben Sie den entstehenden asymptotischen Aufwand für das Lösen an.

b) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine reguläre Tridiagonalmatrix. Erklären Sie, wie Givens-Rotationen verwendet werden können, um eine QR-Zerlegung von A zu berechnen.

Geben Sie außerdem den asymptotischen Aufwand für die Zerlegung an.

Hinweis: Sie brauchen nicht auf die Berechnung der Rotationsmatrizen einzugehen.

c) Begründen Sie für die drei folgenden Matrizen A, B, C, warum es sich nicht um Givens-Rotationen handeln kann.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Newton-Verfahren) **6 = 1+3+2 Punkte**

Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ gegeben. Gesucht ist $x^* \in \mathbb{R}^N$ mit $F(x^*) = 0$.

a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren als Fixpunktiteration

$$x^0 \in \mathbb{R}^N, \qquad x^{k+1} = \phi(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

indem Sie $\phi\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ angeben.

Seien nun $N = 1$ und $F(x) = \frac{1}{x} - 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Zeigen Sie mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x^0 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für alle $x^0 \in (2, \infty)$ divergiert.

Aufgabe 5 (Krylov-Raum-Verfahren) **6 = 1+2+3 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch und positiv definit, $x^0, b \in \mathbb{R}^N$ und $r^0 = b - Ax^0$, $x^* = A^{-1}b$. Wir betrachten Krylov-Raum-Verfahren ohne Vorkonditionierer, d. h. $B = I_N$.

a) Geben Sie die Definition des Krylov-Raums $\mathscr{K}_k(A, r^0)$ für $k \in \mathbb{N}$ an.

b) Geben Sie die Minimalitätseigenschaft der k-ten Iterierten $x^k \in \mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$, des

i) CG-Verfahrens, ii) GMRES-Verfahrens

für $Ax = b$ mit Startwert x^0 in Bezug auf $\mathscr{K}_k(A, r^0)$ an.

c) Sei $F\colon x^0 + \mathscr{K}_k(A, r^0) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(y) = \frac{1}{2}|y - x^*|_A^2$. Zusätzlich seien $x \in x^0 + \mathscr{K}_{k-1}(A, r^0)$ und $d \in \mathscr{K}_k(A, r^0) \setminus \{0\}$ fest.

Zeigen Sie: $\arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}} F(x + \alpha d) = \frac{(b - Ax)^\top d}{|d|_A^2}$, wobei $|x|_A = \sqrt{x^\top A x}$.