

Numerische Mathematik 1

Klausur vom 21.02.2018

Klausureinsicht: 16.03.2018, 14 - 16 Uhr im Raum SR 3.069.

Aufgabe 1 (Kurzaufgaben)

15=3+2+1+2+2+2+3 Punkte

- a) Berechnen Sie die Anzahl der arithmetischen Operationen der LR -Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} d_N & 0 & \cdots & 0 & b_{N-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_2 & b_1 \\ a_{N-1} & \cdots & \cdots & a_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

unter der Voraussetzung, dass die LR -Zerlegung $A = LR$ existiert. Begründen Sie dazu kurz, dass die Struktur von A während des Algorithmus erhalten bleibt.

b) Berechnen Sie $\|A\|_1$ für $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

- c) Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(\alpha A)$ in Abhängigkeit von $\kappa(A)$.
- d) Sei $x \in \mathbb{R}$ eine positive, aber sehr kleine Zahl. Erklären Sie, warum ein Computer für den Ausdruck $-1 + (1 + x)$ den Wert 0 berechnen könnte. Ziehen Sie daraus eine Schlussfolgerung im Bezug auf die bekannten Rechengesetze reeller Zahlen.
- e) Sei $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{10}$. Geben Sie eine mögliche Vorgehensweise an, um λ_6 zu berechnen, wenn eine hinreichend gute Näherung an λ_6 bekannt ist. Erklären Sie, worin der Hauptaufwand liegt.
- f) Sei $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ eine Kontraktion. Zeige: ϕ besitzt maximal einen Fixpunkt.
- g) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär und sei $b \in \mathbb{R}^N$. Sei außerdem $|\cdot|$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|$ die induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie: Wenn $\|I_N - BA\| < 1$ gilt, dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$x^{k+1} = x^k + B(b - Ax^k)$$

bezüglich $|\cdot|$ linear gegen $A^{-1}b$.

Aufgabe 2 (Singulärwertzerlegung)

6=2+4 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ mit $R = \text{rang } A$.

- a) Erklären Sie, was eine Singulärwertzerlegung ist, indem Sie auf Singulärwerte, die Zerlegung und die Faktoren der Zerlegung eingehen.
- b) Geben Sie mithilfe der Singulärwertzerlegung von A eine Lösung der Normalengleichung mit $b \in \mathbb{R}^K$ an. Weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

Aufgabe 3 (Householdertransformation)**6=2+4 Punkte**

- a) Erklären Sie wie und mit welchem asymptotischen Aufwand durch eine QR -Zerlegung einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ das LGS $Ax = b \in \mathbb{R}^N$ gelöst werden kann.
- b) Leiten Sie zu $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ die Householdertransformation Q mit $Qx = \sigma e^1$ her, wobei Sie mögliche Auslöschung vermeiden und σ konkret angeben sollen. Dabei bezeichne $e^1 = (1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N$ den ersten Einheitsvektor im \mathbb{R}^N .

Aufgabe 4 (Newton-Verfahren)**6=2+(1+1+2) Punkte**Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ gegeben.

- a) Beschreiben Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Lösung von $F(x) = 0$ und geben Sie die (bestmögliche) Konvergenzordnung des Verfahrens an.
- b) Seien $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär und $G \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ mit $G(x) = AF(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.
- Zeigen Sie, dass die Nullstellen von F und G identisch sind.
 - Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren angewendet auf F und G bei gleichem Startwert dieselben Iterierten liefert.
 - Diskutieren Sie mit der Wahl $A = \alpha I_N$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das STOP-Kriterium des Newton-Algorithmus.

Aufgabe 5 (GMRES)**9=1+(3+2+3) Punkte**

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{und} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

- a) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = e^n$ für $n = 1, \dots, N$. Dabei bezeichne e^n den n -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^N .
- b) Betrachte nun das GMRES-Verfahren mit Startwert x^0 zur Lösung von $Ax = e^n$.
- Bestimmen Sie die Iterierten $x^1, \dots, x^N \in \mathbb{R}^N$ ohne Vorkonditionierung für $n = N$.
 - Zeigen Sie: Mit dem Vorkonditionierer $B_1 = \beta A^\top$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, konvergiert das Verfahren für $n = 1, \dots, N$ im ersten Schritt.
 - Bestimmen Sie einen Vorkonditionierer $B_2 \neq \beta A^\top$, sodass das Verfahren für $n = 1, \dots, N - 1$ spätestens im zweiten Schritt konvergiert.