

Wieners
Numerik 1

Dauer: 90 min.
Bemerkungen: /

Lösung: keine

Bestanden mit: ? P.

Aufgabe 1 (Gemischte Aufgaben)

2+2+2+4=10 Punkte

- a) Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär, $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$ und $|\cdot|$ eine beliebige Norm. Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(\alpha A^{-1})$ in Abhängigkeit von $\kappa(A)$ bezüglich der Norm $|\cdot|$.
- b) Berechnen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

den Wert von $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ und eine Abschätzung für $\|A\|_2$.

- c) Formen Sie

$$\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) - \ln \left(x - \frac{1}{x} \right) \quad \text{für } |x| \gg 1$$

so um, dass der Ausdruck in der Gleitkomma-Arithmetik gutartig ist.

- d) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin, dass jede strikt diagonaldominante, quadratische Matrix regulär ist.

Aufgabe 2 (Banachscher Fixpunktsatz)

2+3=5 Punkte

- a) Sei $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ eine Kontraktion bezüglich der Norm $|\cdot|$. Zeigen Sie, dass Φ höchstens einen Fixpunkt besitzt, ohne den Banachschen Fixpunktsatz direkt anzuwenden.
- b) Sei $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = -\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. Zeigen Sie, dass die Funktion Φ einen eindeutigen Fixpunkt in $[0, 1]$ besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 3 (Householdertransformation)

3+2=5 Punkte

- a) Definieren Sie die Householdertransformation Q , so dass $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0_N\}$ auf ein Vielfaches $\sigma \in \mathbb{R}$ des Einheitsvektor $e^1 = (1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N$ abgebildet wird und zeigen Sie für Ihre Definition $Qx = \sigma e^1$. Vermeiden Sie bei Ihrer Householdertransformation mögliche Auslöschungen und geben Sie den Householdervektor $w \in \mathbb{R}^N$ sowie $\sigma \in \mathbb{R}$ konkret an.
- b) Zeigen Sie, dass die Householdertransformation orthogonal und längenerhaltend bezüglich $|\cdot|_2$ ist.

Aufgabe 4 (Matrix-Zerlegungen)**2+4+4=10 Punkte**

- Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit $r = \text{rang } A$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $A^\top A$ die quadrierten Singulärwerte von A sind.
- Seien $b \in \mathbb{R}^N$ und $R \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine reguläre rechte obere Dreiecksmatrix. Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode (oder Python-Syntax) an, der die Komponenten $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$, der Lösung zu $Rx = b$ berechnet.
- Seien $A, Q, T \in \mathbb{R}^{N \times N}$, sodass $A = Q^\top T Q$ regulär ist. Dabei seien A symmetrisch und positiv definit, Q orthogonal und T eine Tridiagonalmatrix. Geben Sie einen Algorithmus an, der das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^N$ effizient löst. Geben Sie außerdem für jeden Schritt Ihres Algorithmus den asymptotischen Aufwand, den Namen des verwendeten Verfahrens sowie den Gesamtaufwand an.

Aufgabe 5 (Lineare Iterationsverfahren)**1+3+3=7 Punkte**

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^N$. Zudem sei $B \approx A^{-1}$ ein Vorkonditionierer zu A .

- Geben Sie die Vorschrift eines linearen Iterationsverfahrens mit Vorkonditionierer an.
- Sei $|\cdot|$ eine Vektornorm, $\|\cdot\|$ die dazu induzierte Matrixnorm. Weiterhin sei B und die Matrixnorm so, dass $\|I_N - BA\| < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass sich der Fehler der k -ten Iterierten $|e^k|$ abschätzen lässt durch $|e^0|$.
- Sei konkret

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie das Jacobi-Verfahren angewandt auf $Ax = b$ mit dem gegebenen A auf Konvergenz in der Euklidischen-Norm $|\cdot|_2$.

Aufgabe 6 (Krylovraumverfahren)**1+2+3=6 Punkte**

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^N$. Zudem sei $B \approx A^{-1}$ ein Vorkonditionierer zu A .

- Geben Sie die Definition des Krylovraums $\mathcal{K}_k(BA, Bb)$ aus der Vorlesung an.
- Geben Sie die Minimalitätseigenschaft an, die die k -te Iterierte x^k des GMRES-Verfahrens erfüllt.
- Zeigen Sie, dass jedes Krylov-Raum-Verfahren in exakter Arithmetik nach spätestens N Schritten die Lösung $A^{-1}b$ liefert.

Hinweis: Sie können aus der Vorlesung verwenden, dass für $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gilt:

$$\mathcal{K}_k(BA, Bb) = \mathcal{K}_{k+1}(BA, Bb) \iff A^{-1}b \in x^0 + \mathcal{K}_k(BA, Bb)$$