Hochbruck
Numerik I

Dauer: 90 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.

Bemerkungen: einseitiges handschriftlich-beschriebemes Din A4 Blatt

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = \begin{cases} 2, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine zweistufige Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) dx \approx b_1 f(c_1) + b_2 f(1)$$

maximaler Ordnung. Wie hoch ist die maximale Ordnung dieser Quadraturformel?

b) Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ eine rationale Zahl. Wie groß kann die maximale Ordnung der zweistufigen Quadraturformel

$$\int_{0}^{1} f(x) dx \approx b_1 f(c_1) + b_2 f(c_2), \qquad c_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \alpha,$$

werden, wenn man $b_{1,2}$ geeignet wählt?

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu folgenden Daten:

$$f(-1) = -3, \quad f'(-1) = 13, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = -27.$$

Bestimmen Sie außerdem mithilfe des Hornerschemas den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

b) Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion ein kubischer Spline ist:

$$s(x) = \begin{cases} -1 - \frac{1}{3}x + \frac{19}{3}x^2 - \frac{14}{3}x^3, & -1 \leq x < 0, \\ -1 - \frac{1}{3}x + \frac{19}{3}x^2 - 4x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3:

a) Gegeben seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Choleskyzerlegung von A und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$. Beachten Sie, dass der Rechenweg klar erkennbar sein muss.

b) Sei $n \geq 3$ und $x = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass für die Householdermatrix $Q = I - \beta v v^T$
$$Qx = \alpha(e_2 + e_3)$$
gilt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geq n$, $\mathrm{Rang}(A) = n$ und Singulärwerten $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$.

Zeigen Sie:

a) $\min\limits_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \sigma_n$.

b) $\kappa_2(A) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

c) Ist $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit, dann stimmen die Singulärwerte und die Eigenwerte von B überein.

d) $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$.

Lösung von Aufgabe 1:

a) Die Ordnungsbedingungen aus Korollar 1.8 liefern:

$$q = 1: \quad \int_{-1}^{1} \omega(x)dx = 2\int_{-1}^{0} 1dx + \int_{0}^{1} 1dx = 3 \overset{!}{=} b_1 + b_2$$
$$q = 2: \quad \int_{-1}^{1} x\omega(x)dx = 2\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{1} xdx = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \overset{!}{=} b_1c_1 + b_2$$
$$q = 3: \quad \int_{-1}^{1} x^2\omega(x)dx = 2\int_{-1}^{0} x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \overset{!}{=} b_1c_1^2 + b_2$$

Wir ziehen die zweite von der dritten und die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$\frac{3}{2} = b_1c_1(c_1 - 1),$$
$$-\frac{7}{2} = b_1(c_1 - 1),$$

und folglich

$$c_1 = -\frac{3}{7}, \qquad b_1 = \frac{49}{20}, \qquad b_2 = \frac{11}{20}.$$

Die Quadraturformel lautet also

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)dx = \frac{49}{20}f(-\tfrac{3}{7}) + \frac{11}{20}f(1).$$

Die Quadraturformel hat nicht Ordnung 4, denn wegen

$$\int_{-1}^{1} x^3\omega(x)dx = -\frac{1}{4} \overset{!}{=} \frac{49}{20}\left(-\frac{3}{7}\right)^3 + \frac{11}{20} = -\frac{27}{140} + \frac{77}{140} > 0$$

ist die Ordnungsbedingung zu Ordnung 4 nicht erfüllt. Die Gewichte b_1, b_2 und die zweite Stützstelle c_1 waren eindeutig durch die Ordnungsbedingungen zu Ordnung 3 bestimmt, also ist die maximal mögliche Ordnung 3.

b) Es ist $s = 2$ und wegen $p \geq s$ ist die Ordnung mindestens 2.

Nach Satz 1.7 sind die Gewichte durch die Stützstellen c_i bestimmt und daher $b_1 = b_2$. Da die Quadraturformel symmetrisch ist, ist die Ordnung nach Satz 1.6 aus der Vorlesung gerade, damit haben wir nicht Ordnung 3.

Nach Satz 1.17 ist die maximale Ordnung $2s = 4$, welche nur durch eine Gauß-Quadraturformel erfüllt werden kann, vgl. Satz 1.22. Diese hat aber mit Beispiel 1.24 Knoten aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, folglich ist die Ordnung nicht 4, sondern 2.

Lösung von Aufgabe 2:

a) Mit Hilfe des Tableaus der dividierten Differenzen

x_i	y_i	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$
-1	-3				
		13			
-1	-3		-9		
		4		3	
0	1		-3		-2
		-2		-3	
1	-1		-12		
		-26			
2	-27				

erhalten wir das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} p(x) &= -3 + (x+1)\Big(13 + (x+1)\big(-9 + x\big(3 + (x-1)(-2)\big)\big)\Big) \\ &= 1 - x^2 + x^3 - 2x^4 \quad \text{(Vereinfachen nicht verlangt)} \end{aligned}$$

Wir werten nun noch $p(x)$ mithilfe des Hornerschemas für Polynome in Newton-Form (Algorithmus 2.2) an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus.

Es ist:

(i) $p := \delta^4 y[x_0, \dots, x_4] = -2$

(ii) $p := \delta^3 y[x_0, \dots, x_3] + (\frac{1}{2} - x_3)p = 3 + (\frac{1}{2} - 1)(-2) = 4$

(iii) $p := \delta^2 y[x_0, \dots, x_2] + (\frac{1}{2} - x_2)p = -9 + \frac{1}{2} \cdot 4 = -7$

(iv) $p := \delta^1 y[x_0, \dots, x_1] + (\frac{1}{2} - x_1)p = 13 + (\frac{1}{2} + 1)(-7) = \frac{5}{2}$

(v) $p := y[x_0] + (\frac{1}{2} - x_0)p = -3 + (\frac{1}{2} + 1)\frac{5}{2} = \frac{3}{4}$

Also ergibt sich $p(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

b) Wir müssen überprüfen ob die Funktion (zusammengesetzt aus zwei kubischen Polynomen) aus $C^2[-1,1]$ ist. Da aber die ersten drei Koeffizienten der beiden Polynome übereinstimmen, stimmen Funktionswerte und die ersten beiden Ableitungen an der Stelle 0 überein und damit ist die Funktion aus $C^2[-1,1]$.

Lösung von Aufgabe 3:

a) Wir bestimmen (vgl. Algorithmus 4.1)

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= a_{11}^{1/2} = 1,\\
l_{21} &= a_{21}/l_{11} = 2,\\
l_{31} &= a_{31}/l_{11} = 3,\\
l_{22} &= \left(a_{22} - l_{21}^2\right)^{1/2} = (8-4)^{1/2} = 2,\\
l_{32} &= \left(a_{32} - l_{31}l_{21}\right)/l_{22} = (4 - 3\cdot 2)/2 = -1,\\
l_{33} &= \left(a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2\right)^{1/2} = (11-9-1)^{1/2} = 1.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Wir wollen nun

$$
Ax = LL^T x = b
$$

lösen. Dafür lösen wir zunächst $Ly = b$ durch Vorwärtssubstitution, also

$$
\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Das führt auf $y_1 = 1$,

$$
\begin{aligned}
2y_1 + 2y_2 = 8 \quad &\Longrightarrow \quad y_2 = \frac{8-2}{2} = 3\\
3y_1 - y_2 + y_3 = -1 \quad &\Longrightarrow \quad y_3 = -1 - 3 + 3 = -1.
\end{aligned}
$$

Anschließend lösen wir $L^T x = y$ durch Rückwärtssubstitution, d.h.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Das ergibt $x_3 = -1$,

$$
\begin{aligned}
2x_2 - x_3 = 3 \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1,\\
\text{und} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = 1 - 2 + 3 = 2,
\end{aligned}
$$

also $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Wir stellen zunächst fest, dass $x \neq 0$ und $x \notin \text{span}\{e_2 + e_3\}$ und gehen vor, wie in Lemma 4.21 aus der Vorlesung. Aus der Orthogonalität von Q folgt $\sqrt{n} = \|x\| = \|Qx\| = |\alpha| \, \|e_2 + e_3\| = |\alpha| \sqrt{2}$. Somit ist $|\alpha| = \sqrt{n/2}$. Wir setzen $\alpha = -\sqrt{n/2}$, mit

$$Qx = x - \beta v(v^T x) = \alpha(e_2 + e_3)$$

folgt dann

$$v = \frac{x - \alpha(e_2 + e_3)}{\beta v^T x}.$$

Da die Normierung von v keine Rolle spielt, können wir

$$v = x - \alpha(e_2 + e_3) = [1, 1 + \sqrt{n/2}, 1 + \sqrt{n/2}, 1, \dots, 1]^T$$

wählen. Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} v^T v &= n - 2 + 2(1 + \sqrt{n/2})^2 \\ &= n - 2 + 2 + 4\sqrt{n/2} + n \\ &= 2(n + \sqrt{2n}), \end{aligned}$$

also ist

$$\beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{n + \sqrt{2n}}.$$

Lösung von Aufgabe 4:

a) Wir verwenden, dass A reell ist und die Singulärwertzerlegung (Satz 4.26) $A = U\Sigma V^T$ mit unitären Matrizen U, V und $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und berechnen für ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$,

$$\|Ax\|_2 = \left\|U\Sigma V^T x\right\|_2 = \left\|\Sigma V^T x\right\|_2,$$

da U unitär ist. Weiter schreiben wir $V^T x = y$. Damit gilt

$$\left\|\Sigma V^T x\right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 y_j^2 \geq \sigma_n^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sigma_n^2 \, \|y\|_2^2 = \sigma_n^2,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\sigma_j \geq \sigma_n$ und V untär ist. Wir haben somit gezeigt, dass $\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leq \sigma_n$. Um Gleichheit zu zeigen, verwenden wir $x = Ve_n$, wobei e_n den n-ten Einheitsvektor bezeichne. Dann gilt

$$\|Ax\|_2 = \|\Sigma e_n\|_2 = \sigma_n.$$

b) Mit Lemma 4.14 und Satz 4.28 folgt, dass $\sigma_n^2 > 0$, also $\sigma_n > 0$ ist. Nach Definition 4.17 gilt

$$\kappa(A) = \frac{\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2}{\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2}.$$

Mit der Identität $\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1$ aus der Vorlesung (Satz 4.28) und Teil (a) folgt die Behauptung.

c) Sei $x \neq 0$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda > 0$. Dann gilt

$$B^T Bx = B^2 x = \lambda Bx = \lambda^2 x,$$

wobei wir die Symmetrie von B verwendet haben. Nach Satz 4.28 aus der Vorlesung gilt somit

$$\sigma_i^2(B) = \lambda_i(B^T B) = \lambda_i^2(B), \qquad i = 1, \ldots n.$$

Da B positiv definit ist, folgt die Behauptung.

d) Da A reell ist, haben wir $A^H A = A^T A$. Dann gilt nach Satz 4.28

$$\lambda(A^T A) = \{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$$

und $A^T A$ ist symmetrisch und positiv definit. Mit Teil (b) und (c) folgt

$$\kappa(A^T A) = \frac{\max(SW\ A^T A)}{\min(SW\ A^T A)} = \frac{\max(EW\ A^T A)}{\min(EW\ A^T A)},$$

so dass

$$\kappa(A^T A) = \sigma_1^2 / \sigma_n^2 = \left(\sigma_1 / \sigma_n\right)^2 = \kappa(A)^2,$$

wie behauptet.