

Aufgaben Numerik I Frühjahr 2013

Aufgabe 1 (Cholesky-Zerlegung)

- (a) Unter welchen Voraussetzungen an eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung $M = LL^T$?
- (b) Unter der Voraussetzung, dass eine Cholesky-Zerlegung einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ existiert, nennen Sie einen ausschlaggebenden Vorteil der Cholesky-Zerlegung gegenüber einer LR -Zerlegung.
- (c) Gegeben sei nun das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- (i) Geben Sie eine Permutationsmatrix P an, so dass PA eine Cholesky-Zerlegung LL^T besitzt.
- (ii) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $PA = LL^T$ und lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 2 (QR-Zerlegung)

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit den Spalten $a_j \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie unter Verwendung der QR -Zerlegung von A die folgende Abschätzung:

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^N \|a_j\|_2$$

Begründen Sie jeden Schritt ausreichend.

Aufgabe 3 (Gerschgorin)

- (a) Formulieren Sie den Satz von Gerschgorin zur Abschätzung von Eigenwerten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$.
- (b) Beweisen Sie den Satz von Gerschgorin.
- (c) Gegeben sei die Matrix

$$A_N = \begin{pmatrix} 5 & -1 & & \\ -1 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad N > 3.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine Abschätzung für die Konditionszahl $\kappa_2(A_N)$.

Aufgabe 4 (Ausgleichsproblem und Singulärwertzerlegung)

(a) Gegeben seien die Wertepaare

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|---|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| t_i | 1/5 | 1/4 | 1/3 | 1/2 | 1 |
| y_i | 10 | 6 | 5 | 2 | 2 |

Bestimmen Sie a und b so, dass die Funktion

$$\phi(a, b) = \sum_{i=0}^4 \left| y_i - \left(a + \frac{b}{t_i} \right) \right|^2, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

für (a, b) ihr Minimum annimmt und berechnen Sie dieses.(b) Wie ist eine Singulärwertzerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ mit Rang R definiert? Geben Sie alle Eigenschaften (inkl. Größen) der zugehörigen Matrizen an. In welchem Zusammenhang stehen die Singulärwerte von A zu den Eigenwerten von $A^T A$?**Aufgabe 5** (GMRES- Verfahren)(a) Sei $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $d \in \mathbb{R}^N$. Geben Sie die Definition des k -ten Krylovraums $\mathcal{K}_k(C, d)$ an.(b) Sei x^0 der Startvektor für das GMRES-Verfahren zur Berechnung einer Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$.Was (und in welchem Raum) wird beim GMRES-Verfahren (mit Vorkonditionierer B) im k -ten Schritt minimiert?

(c) Seien nun speziell

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

so dass x die eindeutige Lösung des LGS $Ax = b$ darstellt. Zeigen Sie:Das GMRES-Verfahren (ohne Vorkonditionierung, d.h. $B = I_N$) mit Startwert $x^0 = 0$ liefert die Vektoren $x^1 = x^2 = \dots = x^{N-1} = 0$ und $x^N = x$.

Lösungen Numerik I Frühjahr 2013

Da das Institut keine Lösungen bereitgestellt hat, hat die Fachschaft diese Lösung erstellt und garantiert nicht für dessen Richtigkeit.

Lösung zu Aufgabe 1

- (a) Die Matrix M muss symmetrisch und positiv definit sein.
(b) Ein Vorteil der Cholesky-Zerlegung ist, dass sie numerisch stabiler ist.
(c) (i) Die Permutationsmatrix lautet

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M := PA = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

- (ii) $m_{31} = m_{32} = m_{41} = m_{42} = 0 \Rightarrow l_{31} = l_{32} = l_{41} = l_{42} = 0$ (denn 0 bleibt 0).

$$l_{11} = \sqrt{m_{11}} = \sqrt{16} = 4$$

$$l_{21} = \frac{m_{21}}{l_{11}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$l_{22} = \sqrt{m_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5 - 4} = 1$$

$$l_{33} = \sqrt{m_{33}} = \sqrt{16} = 4$$

$$l_{43} = \frac{m_{43}}{l_{33}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$l_{44} = \sqrt{m_{44} - l_{43}^2} = \sqrt{5 - 4} = 1$$

Daraus folgt

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $PA = LL^T$.

Somit folgt für unser LGS

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LL^T x = Pb.$$

Ausrechnen der rechten Seite ergibt

$$Pb = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$L \underbrace{L^T x}_{y:=} = Pb.$$

Wir berechnen nun zunächst y mit Hilfe des LGS $Ly = Pb$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right).$$

Daraus folgt

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit bleibt noch auszurechnen $L^T x = y$, also

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Daraus folgt

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

Mit $|\cdot|_2$ bezeichnen wir die 2-Norm. Die i -te Spalten der Matrix Q bzw. A bezeichnen wir mit q_i bzw. a_i . Die Diagonalelemente der Matrix R bezeichnen wir mit r_{ii} .

$$\begin{aligned} |\det A| &= |\det(QR)| = |\underbrace{\det Q}_{\in\{-1,1\}}| \cdot |\det R| = |\det R| \\ &= \prod_{i=1}^N |r_{ii}| = \prod_{i=1}^N |q_i^T a_i| \stackrel{CSU}{\leq} \prod_{i=1}^N \underbrace{|q_i|_2}_{=1} |a_i|_2 \\ &= \prod_{i=1}^N |a_i|_2 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Zu $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sind die Gerschgorin-Kreise durch

$$K_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - A[n, n]| \leq \sum_{k \neq n} |A[n, k]| \right\}, \quad n = 1, \dots, N$$

gegeben.

(b) Sei λ ein Eigenwert von A .

Für $1 \leq i \leq N$ gilt

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\iff \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k = \lambda x_i \\ &\iff (\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N a_{ik} x_k \end{aligned}$$

Sei nun $m \in \{1, \dots, N\}$ mit $\|x\|_\infty = |x_m|$.

Daraus folgt $|\lambda - a_{mm}| \cdot \|x\|_\infty \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N |a_{mk}| \cdot \|x\|_\infty$, also $\lambda \in K_m$.

(c) Für die Konditionszahl von A_N gilt

$$\kappa_2(A_N) = \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|.$$

Weiter gilt für den ersten und N-ten Gerschgorin-Kreis

$$\begin{aligned} K_1 = K_N &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 5| \leq 1\} \\ &\Rightarrow |\lambda| \in [4, 6] \end{aligned}$$

Für die restlichen Kreise gilt

$$\begin{aligned} K_i &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 5| \leq 2\}, \quad i \in \{2, \dots, N-1\} \\ &\Rightarrow |\lambda| \in [3, 7] \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man $|\lambda_{\max}| \leq 7$, $|\lambda_{\min}| \leq 3$. Für die Kondition von A_N ergibt sich schließlich

$$\kappa_2(A_N) \leq \frac{7}{3}.$$

Anmerkung: Da die Matrix symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell. Somit können die obigen Betrachtungen alle in den reellen Zahlen gemacht werden.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Berechnen der Funktion $\phi(a, b)$ ergibt

$$\begin{aligned} \phi(a, b) &= \left| 10 - \left(a + \frac{b}{1/5}\right) \right|^2 + \left| 6 - \left(a + \frac{b}{1/4}\right) \right|^2 + \left| 5 - \left(a + \frac{b}{1/3}\right) \right|^2 \\ &\quad + \left| 2 - \left(a + \frac{b}{1/2}\right) \right|^2 + \left| 2 - \left(a + \frac{b}{1}\right) \right|^2 \\ &= |10 - a - 5b|^2 + |6 - a - 4b|^2 + |5 - a - 3b|^2 + |2 - a - 2b|^2 + |2 - a - b|^2. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Dann gilt für ϕ

$$\phi(a, b) = \left| c - A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|^2.$$

Wir berechnen

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}, \quad A^T c = \begin{pmatrix} 25 \\ 95 \end{pmatrix}.$$

Lösen von $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T c$ ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 15 & 25 \\ 15 & 55 & 95 \end{array} \right) \Rightarrow (a, b) = (-1, 2).$$

- (b) Als Singulärwertzerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ mit $\text{Rang}(A) = R$ bezeichnet man ein Produkt der Gestalt $A = V\Sigma U^T$, wobei $V \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ orthogonal sind und $\Sigma \in \mathbb{R}^{K \times N}$ mit $\Sigma(r, r) = \sigma_r$ für $r = 1, \dots, R$ und $\Sigma(k, n) = 0$ für $k = 1, \dots, K$, $n = 1, \dots, N$, $k \neq n$. Dabei bezeichnen wir mit $\sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$ mit $r = 1, \dots, R$ die Singulärwerte von $A^T A$ (λ_r sind die Eigenwerte von $A^T A$).

Lösung zu Aufgabe 5

- (a) Der k -te Krylovraum ist gegeben durch

$$\mathcal{K}_k(C, d) = \text{span}\{d, Cd, C^2d, \dots, C^{k-1}d\} = \{P(C)d : P \in \mathbb{P}_{k-1}\}.$$

- (b) Beim GMRES-Verfahren wird der Ausdruck $\|B(b - Ax)\|_2$ wobei x den Raum $x^0 + \text{span}\{v^1, \dots, v^k\}$ durchläuft.
- (c)

Numerische Mathematik I

Klausur vom 10.09.2013 - Seite 1/3

Aufgabe 1 (LR-Zerlegung)

7 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zu A eine LR -Zerlegung mit Spaltenpivotsuche an, so dass $PA = LR$ gilt mit einer Permutationsmatrix P , einer unteren Dreiecksmatrix L mit Einträgen betragsmäßig kleiner gleich 1 und einer oberen Dreiecksmatrix R .

Geben Sie weiterhin die Determinante von A^{-1} an.Aufgabe 2 (QR-Zerlegung)

7 Punkte

Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ nichtsingulär mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ und der QR -Zerlegung $A = QR$. Zeigen Sie:

Ist A normal und $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_N|$, so gilt für die Diagonalelemente von R

$$|\lambda_1| \leq |r_{jj}| \leq |\lambda_N| \quad j = 1, \dots, N.$$

Hinweis: A ist genau dann normal, wenn eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ existiert, so dass $U^H A U = D$.

noch ein Hinweis: Verwenden Sie in Ihrem Beweis $\frac{x^H R^H R x}{x^H x}$ und $D^H D$.

Aufgabe 3 (Iterationsverfahren)

4 Punkte

Betrachten Sie zur Lösung des Blocksystems

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

die beiden Methoden

$$(1) \quad A_1 x^{k+1} + B y^k = b_1, \quad B x^k + A_2 y^{k+1} = b_2$$

$$(2) \quad A_1 x^{k+1} + B y^k = b_1, \quad B x^{k+1} + A_2 y^{k+1} = b_2.$$

Geben Sie hinreichende Bedingungen für die Konvergenz beider Schemata bei beliebiger Wahl der Anfangsdaten x^0, y^0 an.

Numerische Mathematik I

Klausur vom 10.09.2013 - Seite 2/3

Aufgabe 4 (Eigenwertberechnung)

5 Punkte

- (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ und $B \in \mathbb{R}^{N \times M}$. Zeigen Sie, dass die von Null verschiedenen Eigenwerte von AB genau die von Null verschiedenen Eigenwerte von BA sind.
- (b) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von AB .Aufgabe 5 (Ausgleichsproblem)

5 Punkte

Gegeben seien die Messwerte einer unbekanntes Funktion f :

| | | | | |
|-------|----|---------|-------|--------|
| t_i | 0 | $\pi/2$ | π | 2π |
| f_i | -1 | 2 | 0 | -1 |

Es wird vermutet, dass f der Gleichung

$$f(t) = a \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(2t)$$

genügt. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Ausgleichsproblems die Werte a und b .

Aufgabe 6 (Fragenteil)

7+3 Punkte

(a) **Kurzaufgaben:**

Beantworten Sie die Aufgaben auf einem separaten Blatt.

- i) Bestimmen Sie die angegebenen Normen und Konditionen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

I) $|A|_1$ II) $|A|_\infty$ III) $|B|_2$ IV) $\kappa_2(B)$

- ii) Geben Sie die Fehlerabschätzung des cg-Verfahrens ohne Vorkonditionierer (d.h. $B = I$) zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix A an (hierbei bezeichnet x^k die k -te Iterierte):

$$|x^k - x|_A \leq$$

- iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch und positiv definit, sowie $b \in \mathbb{R}^N$. Vergleichen Sie den Aufwand (Anzahl arithmetischer Operationen) des LR -, Cholesky und QR -Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Welches der drei Verfahren würden Sie verwenden?
- iv) Gegeben sei das eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Es sei \tilde{x} eine Näherungslösung und r das Residuum. Zeigen Sie: Für den Fehler gilt (in einer beliebigen Norm)

$$|\tilde{x} - x| \leq |A^{-1}| \cdot |r|.$$

(b) **Multiple-Choice:**

Für jede richtige Antwort erhalten Sie 0.5 Punkte, für jede falsche Antwort erhalten Sie 0.5 Punkte Abzug. Beantworten Sie diesen Aufgabenteil in der ausgedruckten Tabelle auf einem der Lösungsblätter. Auf diesen Aufgabenteil erhalten Sie mindestens 0 Punkte.

- i) Die Addition und Multiplikation zweier positiver Zahlen ist immer gut konditioniert.
- ii) Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl einer Matrix A . Es gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.
- iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine reguläre Matrix. Die QR -Zerlegung von A ist eindeutig (Q orthogonale Matrix, R rechte obere Dreiecksmatrix).
- iv) Jede Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.
- v) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ habe einen separierten betragsmäßig größten Eigenwert λ_{\max} . Die Vektoriteration konvergiert für jede quadratische Matrix und für jeden Startvektor $x_0 \neq 0$ immer gegen einen Eigenvektor zu λ_{\max} .
- vi) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ gilt $\rho(2A) = 2\rho(A)$, wobei ρ den Spektralradius bezeichnet.

Lösungen Numerik 1

Kasim Karadeniz

18. Oktober 2013

Erstellt und geTeXt von Kasim Karadeniz. Das Institut hat keine Lösung zur Verfügung gestellt.

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

beim Spaltenpivotisieren nimmt man das betragsmäßig größte Element einer Spalte und vertauscht die entsprechende Zeile mit der ersten Zeile der Matrix. Wir beginnen mit der ersten Spalte: die 8 in Zeile zwei ist der größte Eintrag.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l}]_+ \\]_+ \\]_+ \\]_+ \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Pivotisieren und zwar in der zweiten Spalte die 2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nochmal Pivotisieren in der dritten Spalte die 2

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hier raus kann man die Matrizen L und R ablesen.
Die Permutationsmatrix lautet:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die links untere normierte Matrix L lautet:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die reguläre rechts obere Matrix R lautet:

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $PA = LR$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = -1/64$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \det(PA) &= \det(P) \cdot \det(A) \\ &= -1 \cdot \det(A) \\ &= -1 \cdot \det(LR) \\ &= -1 \cdot \det(L) \cdot \det(R) \\ &= -1 \cdot 1 \cdot \det(R) \\ &= -1 \cdot 1 \cdot 64 \\ &= -64 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Da A normal ist, existiert eine orthonormale Matrix U und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ mit $D = U^H \cdot A \cdot U$ und $U^H \cdot U = I$. Mit dem Hinweis folgt $D^H \cdot D = U^H \cdot A^H \cdot A \cdot U$. Weiterhin gilt $R = Q^H \cdot A$, also $R^H \cdot R = A^H \cdot A$. Damit gilt auch $D^H \cdot D = U^H \cdot R^H \cdot R \cdot U = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_N|^2)$. Betrachtet man für $x \neq 0$:

$$\frac{x^H R^H R x}{x^H x} = \frac{x^H U U^H R^H R U U^H x}{x^H U U^H x} = \frac{y^H D^H D y}{y^H y} = \frac{\sum_{i=1}^N |\lambda_i|^2 |y_i|^2}{\sum_{i=1}^N |y_i|^2}$$

Wegen $|\lambda_1|^2 \leq \dots \leq |\lambda_N|^2$ ergibt sich nun folgende Ungleichung

$$|\lambda_1|^2 \leq \frac{x^H \cdot R^H \cdot R \cdot x}{x^H \cdot x} = \frac{(R \cdot x)^H \cdot (R \cdot x)}{x^H \cdot x} \leq |\lambda_N|^2$$

R ist eine obere Dreiecksmatrix und besitzt somit die EW r_{jj} ($j = 1, \dots, N$).

Sei nun x_j ungleich 0 ein EV zu EW r_{jj} . Es folgt:

$$\frac{(R \cdot x_j)^H \cdot (R \cdot x_j)}{x_j^H \cdot x_j} = |r_{jj}|^2$$

Mit der oberen Ungleichung folgt

$$|\lambda_1|^2 \leq |r_{jj}|^2 \leq |\lambda_N|^2$$

Nachdem Wurzelziehen ergibt es die Behauptung

$$|\lambda_1| \leq |r_{jj}| \leq |\lambda_N|$$

Aufgabe 3

Damit beide Methoden konvergieren, müssen die Spektralradien der Iterationsmatrizen kleiner als eins sein.

(1)

Damit ich die Iterationsmatrizen sehe, muss ich nach x^{k+1} bzw. y^{k+1} auflösen.

Es gilt:

$$x^{k+1} = A_1^{-1} \cdot b_1 - A_1^{-1} \cdot B \cdot y^k$$

$$y^{k+1} = A_2^{-1} \cdot b_2 - A_2^{-1} \cdot B \cdot x^k$$

Die Iterationsmatrizen sind $A_1^{-1} \cdot B$ und $A_2^{-1} \cdot B$. Damit diese Iteration konvergiert, muss gelten: $\rho(A_1^{-1} \cdot B) < 1$ und $\rho(A_2^{-1} \cdot B) < 1$

(2)

Damit ich die Iterationsmatrizen sehe, muss ich die erste Gleichung nach x^{k+1} auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen. Daraus folgt, dass A_1^{-1} invertierbar sein muss. Es gilt:

$$y^{k+1} = A_2^{-1} \cdot b_2 - A_2^{-1} \cdot B \cdot A_1^{-1} \cdot b_1 + A_2^{-1} \cdot B \cdot A_1^{-1} \cdot B \cdot y^k$$

Die Iterationsmatrix ist $A_2^{-1} \cdot B \cdot A_1^{-1} \cdot B$. Damit diese Iteration konvergiert, muss gelten: $\rho(A_2^{-1} \cdot B \cdot A_1^{-1} \cdot B) < 1$

Daraus folgt, dass A_2^{-1} invertierbar sein muss.

Aufgabe 4

4a)

Sei $x \neq 0$ ein EV zu einem $\lambda \neq 0$ beliebigen EW. Also gilt $A \cdot B \cdot x = \lambda \cdot x$

Da $x \neq 0$ ist, folgt daraus $B \cdot x \neq 0$. Mit der Multiplikation von links erhalten wir

$$B \cdot A \cdot B \cdot x = (B \cdot A) \cdot B \cdot x = \lambda \cdot B \cdot x.$$

Daraus folgt $B \cdot x \neq 0$ ist ein EV zu einem EW $\lambda \neq 0$ von $B \cdot A$.

Für die Rückrichtung gilt zu einem EV $y \neq 0$ und einem beliebigen EW $\mu \neq 0$. Also gilt $B \cdot A \cdot y = \mu \cdot y$. Da $y \neq 0$ ist, folgt $A \cdot y \neq 0$. Mit der Multiplikation von links erhalten wir

$$A \cdot B \cdot A \cdot y = (A \cdot B) \cdot A \cdot y = \mu \cdot A \cdot y.$$

Daraus folgt $A \cdot y \neq 0$ ist ein EV zu einem EW $\mu \neq 0$ von $A \cdot B$. Da EW beliebig waren, stimmen alle EW überein.

4b)

Da die EW von $A \cdot B$ und $B \cdot A$ die selben sind, berechne ich die EW der Matrix $B \cdot A$, da diese nur eine 2×2 -Matrix ist. Das Charakteristische Polynom lautet $(-\lambda)^2 \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 16)$. Die EW sind -1, 16 und 0 als doppelte Nullstelle.

Aufgabe 5

Aus der Tabelle lässt sich folgendes Gleichungssystem ableiten:

$$\begin{aligned} -1 &= a \cdot \cos(0) + b \cdot \cos(0) \\ 2 &= a \cdot \cos(\pi/2) + b \cdot \cos(2 \cdot \pi/2) \\ 0 &= a \cdot \cos(\pi) + b \cdot \cos(2 \cdot \pi) \\ -1 &= a \cdot \cos(2 \cdot \pi) + b \cdot \cos(4 \cdot \pi) \end{aligned}$$

In Zahlen:

$$\begin{aligned} -1 &= a \cdot 1 + b \cdot 1 \\ 2 &= a \cdot 0 + b \cdot (-1) \\ 0 &= a \cdot (-1) + b \cdot 1 \\ -1 &= a \cdot 1 + b \cdot 1 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgende Matrix ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das Ausgleichsproblem wird mit der Normalgleichung

$$A^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T \cdot c$$

gelöst. Dazu berechnen wir zunächst $A^T A$ und $A^T c$ und erhalten dann $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot c = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Mit einfachem Gaußen folgt $a = -\frac{4}{11}$ und $b = -\frac{10}{11}$.

Aufgabe 6

6a)

i) 1) $|A|_1$ ist die Spaltensummennorm. Es gilt nach Definition:

$$|A|_1 = \max_{n=1, \dots, N} \sum_{k=1}^K |A[k, n]|$$

Also: $|A|_1 = \max\{|2| + |0|, |3| + |4|\} = \max\{2, 7\} = 7$.

2) $|A|_\infty$ ist die Zeilensummennorm. Es gilt nach Definition:

$$|A|_\infty = \max_{k=1, \dots, K} \sum_{n=1}^N |A[k, n]|$$

Also: $|A|_\infty = \max\{|2| + |3|, |0| + |4|\} = \max\{5, 4\} = 5$.

3) $|B|_2$ ist definiert als Spektralnrm. Es gilt:

$$|B|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(B^T \cdot B)}$$

Die EW von $B^T \cdot B$ lauten 25 und 9. Die Spektralnrm nimmt den größten EW und das ist 25 und laut Formel muss noch die Wurzel gezogen werden und es ergibt als Lösung die 5.

4) Die Kondition ist definiert als der Quotient vom betragsmäßig größten EW vom betragsmäßig kleinsten EW. Die EW von B lauten 5 und 3. Der Quotient davon ist $\frac{5}{3}$. Also ist die Kondition von B gerade $\frac{5}{3}$.

ii) $|x^k - x|_A \leq \epsilon |x^0 - x|_A$

Laut Fehlerabschätzung gilt:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1} \right)^k \leq \epsilon$$

iii) Für die Operationen der Verfahren gilt: QR-Zerlegung: $\frac{4}{3}\mathcal{O}(N^3)$, LR-Zerlegung: $\frac{2}{3}\mathcal{O}(N^3)$, $L^T L$ -Zerlegung: $\frac{1}{3}\mathcal{O}(N^3)$. Die Cholesky-Zerlegung benötigt die wenigsten Operationen, deshalb wähle ich die Cholesky Zerlegung.

iv) $r = b - A \cdot \tilde{x}$ und $x = A^{-1} \cdot b$. Dann:

$$\begin{aligned} |\tilde{x} - x| &= |\tilde{x} - A^{-1} \cdot b| \\ &= |A^{-1} \cdot (A \cdot \tilde{x} - b)| \\ &\leq |A^{-1}| \cdot |b - A \cdot \tilde{x}| \\ &= |A^{-1}| \cdot |r| \end{aligned}$$

6b)

- i) wahr
- ii) falsch
- iii) falsch
- iv) falsch
- v) falsch
- vi) wahr

Numerische Mathematik II

Klausur vom 17.09.2013 - Seite 1/3

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren)

3 Punkte

Formulieren Sie für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}0 &= \exp(x) + y^3 \\0 &= 3 + 3y + \sin(x)\end{aligned}$$

das Newton-Verfahren und führen Sie einen Newton-Schritt mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ durch. Wie lautet (x_1, y_1) ?

Aufgabe 2 (Newton- und Hermite-Interpolation)

2+2 Punkte

- (a) Berechnen Sie mit dem Newton-Schema das Interpolationspolynom $P(t)$ zu folgenden Daten:

| | | | |
|-------|----|---|---|
| i | 0 | 1 | 2 |
| t_i | 0 | 1 | 2 |
| f_i | -2 | 0 | 4 |

- (b) An den Stellen t_0 und t_2 werden nun zusätzlich Werte der ersten Ableitung vorgegeben. Berechnen Sie das Interpolationspolynom $Q(t)$, das $Q(t_i) = f_i$, $Q'(t_0) = -3$ und $Q'(t_2) = 5$ erfüllt, indem Sie das Newton-Tableau aus Teil (a) in geeigneter Weise erweitern.

Aufgabe 3 (linearer Spline)

6+1 Punkte

Sei $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ eine Zerlegung eines gegebenen Intervalls $[a, b]$. Sei $C_{\Delta}^1[a, b]$ der Raum derjenigen stetigen Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die stückweise differenzierbar sind.

Seien $f_0, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ Stützwerte und S die zugehörige interpolierende lineare Splinefunktion. Zeigen Sie:

- (a) Für jede Funktion $f \in C_{\Delta}^1[a, b]$ mit $f(t_j) = f_j$ für $j = 0, 1, \dots, N$ gilt:

i) $|f' - S'|_0^2 = |f'|_0^2 - |S'|_0^2$.

- ii) Für eine beliebige (bezüglich Δ) lineare Splinefunktion ψ gilt die Abschätzung $|f' - S'|_0 \leq |f' - \psi'|_0$.

Hierbei wird für eine stetige Funktion $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die L_2 -Norm

$$|\psi|_0 := \left(\int_a^b |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

verwendet.

- (b) Die interpolierende lineare Splinefunktion S löst das Minimierungsproblem

$$\text{minimiere } |f'|_0 \text{ für } f \in C_{\Delta}^1[a, b] \text{ mit } f(t_j) = f_j \text{ für } j = 0, \dots, N.$$

Numerische Mathematik II Klausur vom 17.09.2013 - Seite 2/3

Aufgabe 4 (Orthogonalpolynome)

2+3 Punkte

(a) Die durch die Rekursionsformel

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t) \quad \text{für } k \geq 1,$$

definierten Chebychev-Polynome T_n sind orthogonal auf $[-1, 1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $W(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ (dies muss nicht gezeigt werden!).

Bestimmen Sie die Stützstellen der Gauß-Quadraturformel mit 3 Knoten zu W .

(b) Gegeben sei ein System $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $P_n \in \mathbb{P}_n$ von Orthogonalpolynomen auf dem Intervall $[a, b]$ bezüglich einer (positiven, stetigen) Gewichtsfunktion W . Zeigen Sie, dass das n -te Orthogonalpolynom genau n Nullstellen im Intervall $]a, b[$ hat.

Hinweis: Betrachten Sie hierzu das Polynom

$$P_n \in \mathbb{P}_m, \quad Q_n(t) = \prod_{i=1}^m (t - t_i),$$

wobei t_i , $i = 1, \dots, m$ die Nullstellen von P_n im Intervall $]a, b[$ sind.

Aufgabe 5 (Quadratur)

5 Punkte

Gesucht ist eine Quadraturformel

$$\int_0^1 f(t) dt \rightarrow af(0) + bf'(0) + cf(t_1),$$

welche für alle Polynome von Grad m (mit m möglichst groß) exakt ist. Bestimmen Sie a, b, c, t_1 und geben Sie den erreichten Exaktheitsgrad an.

Numerische Mathematik II Klausur vom 17.09.2013 - Seite 3/3

Aufgabe 6 (Fragenteil)

5.5+2.5 Punkte

(a) **Fragenteil:**

Beantworten Sie die Aufgaben nicht hier, sondern auf einem separaten Blatt.

- i) Sei $P(t)$ das Interpolationspolynom einer zu interpolierenden Funktion f mit Stützstellen t_0, \dots, t_N und zugehörigen Funktionswerten f_0, \dots, f_N . Geben Sie die zugehörigen Lagrange-Basis-Polynome an. Wie lautet damit das Interpolationspolynom $P(t)$?
- ii) Bis zu welchem maximalen Polynomgrad ist die Gauß-Quadratur mit $N \in \mathbb{N}$ Stützstellen auf $[-1,1]$ exakt?
- iii) Geben Sie die (exakte) Fehlerformel für die Simpsonregel $I_2(f)$ an:

$$I_2(f) - \int_a^b f(t) = \frac{1}{90} \cdot \boxed{}$$

- iv) Wieviele Operationen (in O-Notation) benötigt die Fast-Fourier-Transformation (FFT) zur Berechnung von N Koeffizienten?

(b) **Multiple-Choice:**

Für jede richtige Antwort erhalten Sie 0.5 Punkte, für jede falsche Antwort erhalten Sie 0.5 Punkte Abzug. Beantworten Sie diesen Aufgabenteil in der ausgedruckten Tabelle auf einem der Lösungsblätter. Auf diesen Aufgabenteil erhalten Sie mindestens 0 Punkte.

- i) Sei (Q_0, Q_1, \dots, Q_N) eine Folge von Orthogonalpolynomen. Sei $n < N$ und $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$ die Nullstellen von Q_n . Dann ist in jedem Fall λ_k^n keine Nullstelle von Q_{n+1} .
- ii) $S(t) = 0$ für $t \in [-1, 1]$ ist die eindeutige Lösung der kubischen Spline-Interpolation von $f(t) = \sin(\pi t)$ an den Stützstellen $t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1$ mit hermiteschen Randbedingungen $f'(t_i) = S'(t_i), i = 0, 2$.
- iii) Seien t_0, \dots, t_N äquidistante Stützstellen. Für N ungerade sind die Newton-Cotes-Formeln exakt vom Grad $N + 1$.
- iv) Die Summe der Beträge der Gewichte jeder Newton-Cotes-Formel ist 1.
- v) Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte nicht von der zu integrierenden Funktion f ab.

LÖSUNGEN NUMERIK 2 HERBST 2013

Für Richtigkeit und Vollständigkeit wird wie immer keine Gewähr übernommen.

1. AUFGABE (NEWTON-VERFAHREN)

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \exp(x) + y^3 \\ 0 &= 3 + 3y + \sin(x) \end{aligned} \iff f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \exp(x) + y^3 \\ 3 + 3y + \sin(x) \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Berechne

$$f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x) & 3y^2 \\ \cos(x) & 3 \end{pmatrix}.$$

Benutze

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

um f' zu invertieren:

$$\left(f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{3 \exp(x) - 3y^2 \cos(x)} \begin{pmatrix} 3 & -3y^2 \\ -\cos(x) & \exp(x) \end{pmatrix}.$$

Newton-Verfahren: $z^{k+1} = z^k - (f'(z^k))^{-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Einsetzen ergibt für die ersten beiden Folgenglieder:

$$\begin{aligned} z^0 &= (x_0, y_0) = (0, 0), \\ z^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3-0} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also: $(x_1, y_1) = (-1, -\frac{2}{3})$.

2. AUFGABE

!!!!TODO!!!! Es ist echt nicht schwierig aufzuschreiben, ich muss nur noch mal schauen, wie man das TeXt. In b) hat man dann t_0 und t_2 einfach doppelt drin, wobei beim zweiten Mal jeweils der Wert der Ableitung an der jeweiligen Stelle angegeben wird anstatt des Funktionswertes.

3. AUFGABE

a) $f \in C_{\Delta}^1[a, b]$, $f(t_i) = f_i$, S interpolierender linearer Spline.

i) zu zeigen: $|f' - S'|_0^2 = |f'|_0^2 - |S'|_0^2$ mit $|\Psi|_0^2 = \int_a^b |\Psi(t)|^2 dt$.

$$\begin{aligned} |f' - S'|_0^2 &= \int_a^b (f'(t) - S'(t))^2 dt \\ &= \int_a^b (f'(t))^2 - 2 \cdot f'(t)S'(t) + (S'(t))^2 dt \\ &= \int_a^b (f'(t))^2 - 2 \cdot \underbrace{[f' - S'](t)S'(t)}_{(*)} - (S'(t))^2 dt \\ &= |f'|_0^2 - |S'|_0^2 - 2 \cdot (*) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (*) &= \int_a^b [f' - S'](t)S'(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f' - S'](t)S'(t) dt \\ &\stackrel{(**)}{=} \sum_{k=0}^{N-1} S'_k \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f' - S'](t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} S'_k \cdot [f - S]_{t_k}^{t_{k+1}} \stackrel{(***)}{=} 0. \end{aligned}$$

(**): $S'(t)$ ist konstant auf (t_k, t_{k+1}) (setze den Wert auf S'_k). (***) : S ist interpolierend, d.h. $S(t_k) = f(t_k)$, $k = 0, \dots, N$, somit gilt

$$[f - S]_{t_k}^{t_{k+1}} = \underbrace{(f - S)(t_{k+1})}_{=0} - \underbrace{(f - S)(t_k)}_{=0} = 0.$$

ii) Betrachte $f - \Psi$, dann ist $S - \Psi$ die interpolierende lineare Splinefunktion.

$$\begin{aligned} |f' - S'|_0^2 &= |(f' - \Psi') - (S' - \Psi')|_0^2 \\ &\stackrel{(i)}{=} |f' - \Psi'|_0^2 - \underbrace{|S' - \Psi'|_0^2}_{>0} \\ &\leq |f' - \Psi'|_0^2. \end{aligned}$$

b) Nach (a)i) gilt $0 \leq |f' - S'|_0^2 = |f'|_0^2 - |S'|_0^2$, also $|S'|_0^2 \leq |f'|_0^2$ für alle $f \in C_{\Delta}^1[a, b]$ mit $f(t_j) = f_j$.

4. AUFGABE

a) Die ersten vier Orthogonalpolynome lauten:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, \\ T_1(t) &= t, \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, \\ T_3(t) &= 4t^3 - 2t - t = 4t^3 - 3t. \end{aligned}$$

Bei der k -punktigen Gauß-Quadratur sind die Stützstellen gerade die Nullstellen des k -ten Orthogonalpolynoms. Wir berechnen hier also die Nullstellen von T_3 :

$$T_3(t) = 0 \iff (4t^2 - 3)t = 0 \iff t = 0 \vee t = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Die gesuchten Stützstellen sind also:

$$t_0 = -\sqrt{\frac{3}{4}}, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

b) Da W positiv ist, besitzt P_n mindestens eine Nullstelle, denn aufgrund der Orthogonalität zu $p_0(t) = 1$ gilt

$$\int_a^b 1 \cdot p_n(t) \underbrace{w(t)}_{>0} dt = 0.$$

Seien also t_1, \dots, t_m ($1 \leq m \leq n$) die Nullstellen von P_n in (a, b) und $Q_n(t) = \prod_{i=1}^m (t - t_i)$. Dann ist $\int_a^b \underbrace{Q(t)P_n(t)}_{\text{keine VZ-Wechsel}} W(t) dt \neq 0$. Also ist Q vom Grad $\geq n$, da P_n senkrecht auf \mathbb{P}_{n-1} steht bezüglich W . Somit $m = n$.

5. AUFGABE

Da sowohl die gegebene Quadraturformel als auch das Integral linear ist, genügt es, nur Monome zu betrachten [*Nota bene*: Für diesen Satz gibt es oft bereits schon einen Punkt!]. Grad 0 ($f := 1$):

$$\int_0^1 1 dt = 1 \stackrel{!}{=} a + c = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1$$

Grad 1 ($f(x) := x$):

$$\int_0^1 x dt = \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} b + ct_1 = a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot t_1$$

Grad 2 ($f(x) := x^2$):

$$\int_0^1 x^2 dt = \frac{1}{3} \stackrel{!}{=} ct_1^2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot t_1^2$$

Grad 3 ($f(x) := x^3$):

$$\int_0^1 x^3 dt = \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} ct_1^3 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot t_1^3$$

Grad 4 ($f(x) := x^4$):

$$\int_0^1 x^4 dt = \frac{1}{5} \stackrel{!}{=} ct_1^4 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot t_1^4$$

Wir erhalten aus den ersten vier Gleichungen folgendes Gleichungssystem:

$$(1) \quad 1 = a + c$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} = b + ct_1$$

$$(3) \quad \frac{1}{3} = ct_1^2$$

$$(4) \quad \frac{1}{4} = ct_1^3$$

Aus (3) und (4) erhalten wir: $3ct_1^2 = 4ct_1^3$ und $c \neq 0 \neq t_1$. Dies impliziert $3 = 4t_1$, also $t_1 = \frac{3}{4}$. Folglich ist mit (3):

$$c = \frac{1}{3 \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}$$

und mit (2):

$$b = \frac{1}{2} - \frac{16}{27} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18}$$

und mit (1):

$$a = 1 - c = 1 - \frac{16}{27} = \frac{27 - 16}{27} = \frac{11}{27}.$$

Also sind die gesuchten Variablen:

$$a = \frac{11}{27}, \quad b = \frac{1}{18}, \quad c = \frac{16}{27}, \quad t_1 = \frac{3}{4}.$$

Die Quadraturformel ist also für Polynome bis zum Grad 3 genau dann exakt, wenn die Parameter so aussehen (das erhält man, indem man obige Rechnung so aufschreibt, dass überall Äquivalenzpfeile stehen). Für Polynome vom Grad 4 ist diese Formel mit diesen Parametern allerdings nicht mehr exakt:

$$ct_1^4 \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{4} t_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \neq \frac{1}{5},$$

Folglich ist der maximale Exaktheitsgrad $m = 3$.

6. AUFGABE

- a) i) Die Lagrange-Basis-Polynome sind:

$$L_n(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \frac{t - t_k}{t_n - t_k}, \quad n = 0, \dots, N$$

Das Interpolationspolynom lautet damit:

$$P(t) = P_N(t) = \sum_{n=0}^N f_n L_n(t)$$

- ii) Besagte Gauß-Quadratur stimmt für Polynome bis zum Grad $2N - 1$ exakt mit dem Wert des Integrals überein.
 iii) Es gilt nach Vorlesung

$$I_2(f) - \int_a^b f(t) = \frac{1}{90} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\tau) \quad \text{für ein } \tau \in (a, b).$$

- iv) $\mathcal{O}(N \log(N))$.
 b) i) keine Ahnung. **!!!!TODO!!!!**
 ii) Falsch, denn z.B. $-\pi = f'(t_0) = S'(t_0)$ ist für $S(t) = 0$ nicht erfüllt.
 iii) Falsch, **!!TODO: Gegenbeispiel?**. Die Aussage stimmt allerdings für N gerade.
 iv) Falsch, ab $N > 4$ können auch negative Gewichte auftreten.
 v) Richtig.

Klausur Numerische Mathematik 2

07. März 2014

Bitte in Druckschrift ausfüllen:

Nachname: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

| | | | | | |
|-------------|---|----|----|---|----------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
| max. Punkte | 7 | 12 | 12 | 9 | 40 |
| err. Punkte | | | | | |

Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt. Versehen Sie bitte **jedes Blatt** mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.

Sollten Sie mehr Lösungsblätter benötigen, melden Sie sich.

Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.

Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen!

Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.

Bitte halten Sie Ihren Studierendenausweis bereit.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Zum Bestehen der Klausur sind **20 Punkte** hinreichend.

Klausureinsicht: Mittwoch, 19. März ab 14 Uhr (genauer Raum siehe VL-Seite).

Viel Erfolg!

Numerische Mathematik II Klausur vom 07.03.2014 - Seite 1/2

Aufgabe 1 (Orthogonalpolynome)

7 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die Hermite-Polynome durch

$$H_n(t) = (-1)^n \exp(t^2) \frac{d^n}{dt^n} \exp(-t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

definiert. Zeigen Sie:

- (a) (5 Punkte) Die Hermite-Polynome genügen für $n \in \mathbb{N}$ der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

mit $H_0(t) = 1$ und $H_1(t) = 2t$.

- (b) (2 Punkte) Für die Ableitung von H_n gilt:

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Leibnizsche Produktregel für die n -te Ableitung

$$\frac{d^n}{dt^n}(uv)(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dt^k} u(t) \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} v(t) \right)$$

Aufgabe 2 (Interpolation)

12 Punkte

Hinweis: Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!

- (a) (4 Punkte) Beweisen Sie: Für die Lagrange-Polynome $L_n(t)$ zu Stützstellen $t_0 < \dots < t_N$ gilt:

$$\sum_{n=0}^N L_n(t) \equiv 1.$$

- (b) (4 Punkte) Gegeben seien die Stützwerte y_n an den Stützstellen t_n mit

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_n & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y_n & 5 & 3 & 8 & 6 \end{array}.$$

Interpolieren Sie diese Wertetabelle nach der Interpolationsformel von Newton.

- (c) (4 Punkte) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Sei $P(t)$ die lineare Interpolation zu den Knoten $t_0 < t_1$. Zeigen Sie für den Fehler die Abschätzung

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |f(t) - P(t)| \leq \frac{(t_1 - t_0)^2}{8} \sup_{t \in [t_0, t_1]} |f''(t)|.$$

Aufgabe 3 (Quadratur)

12 Punkte

Hinweis: Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!

- (a) **(4 Punkte)** Das Integral $I = \int_0^1 f(t) dt$ soll mit einer N -punktigen Quadraturformel numerisch approximiert werden. Erklären Sie die Unterschiede und Gemeinsamkeiten einer N -punktigen Newton-Cotes-Quadraturformel und einer N -punktigen Gauß-Quadraturformel bezüglich der Wahl der Knoten und der Gewichte. Welchen Exaktheitsgrad liefern diese beiden Formeln?
- (b) **(4 Punkte)** Sei f eine stetige Funktion auf $[-1, 1]$ und folgende Funktionswerte seien bekannt:

$$f(-1) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f(1) = 2.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktionswerte eine Approximation für das Integral $\int_{-1}^1 f(t) dt$ mit dem Romberg-Schema.

- (c) **(4 Punkte)** Zeigen Sie: Für die Gewichte b_i einer Quadraturformel der Ordnung N zur Approximation von $\int_0^1 f(t) dt$ mit Knoten $c_1 < \dots < c_N$, welche $c_i = 1 - c_{N+1-i}$, $i = 1, \dots, N$ erfüllen, gilt $b_i = b_{N+1-i}$ für $i = 1, \dots, N$.

Hinweis: Verwenden Sie die explizite Formel zur Bestimmung der Gewichte b_i .

Aufgabe 4 (Kurzaufgaben)

9 Punkte

- (a) **(1.5 Punkte)** Zur Approximation der Ableitung einer punktweise gegebenen Funktion f verwendet man die erste dividierte Differenz

$$(D_h f)(t) := f[t, t+h].$$

Schätzen Sie den Approximationsfehler $(D_h f)(t) - f'(t)$ für eine genügend glatte Funktion f ab (führende Ordnung in h für $h \rightarrow 0$ reicht aus).

- (b) **(2 Punkte)** Geben Sie Vor- und Nachteile einer Spline-Interpolation in Bezug zu einer Polynominterpolation an.
- (c) **(3 Punkte)** Geben Sie drei Typen von Randbedingungen einer kubischen Spline-Interpolation S zu einer Funktion $f \in C^1$ mit Randpunkten a und b an und benennen Sie kurz die Eigenschaft (Formel genügt).
- (d) **(1 Punkt)** Zur Approximation 2π -periodischer Funktionen werden trigonometrische Polynome verwendet. Geben Sie die Definition eines solchen trigonometrischen Polynoms $T(t)$ bis zum Grad n an (komplex oder reell).
- (e) **(1.5 Punkte)** Geben Sie die Definition der Chebychev-Polynome im Intervall $(-1, 1)$ an (direkt oder per Rekursionsformel). Welches Gewicht $W(t)$ wird hierfür verwendet?