

Numerik 2, SS15 Haupt

Aufgabe 1

(3+8+4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 4 & 2 \\ 3 & 14 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Formulieren Sie zunächst allgemein den Satz von Gershgorin.
- Verwenden Sie den Satz von Gershgorin, um eine möglichst genaue Abschätzung für den betragsmäßig größten Eigenwert λ_{\max} und den betragsmäßig kleinsten Eigenwert λ_{\min} von A zu erhalten.
- Begründen Sie, dass A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne diese explizit zu berechnen.

Aufgabe 2

(5+4+3 Punkte)

- Formulieren Sie den Algorithmus der Inversen Potenzmethode mit Shift in Pseudo-Code.
- Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass für den größten Eigenwert λ_{\max} von A die Gleichung

$$\lambda_{\max} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

erfüllt ist.

- Erläutern Sie, wie mit dem Quotienten $\frac{x^T A x}{x^T x}$ der Algorithmus der Inversen Potenzmethode mit Shift sinnvoll modifiziert werden kann. Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil dieser Modifikation.

Aufgabe 3

(3+10+4 Punkte)

Sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $\Phi_\alpha : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y \\ x + \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie zunächst allgemein alle Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes an.
- Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz einer eindeutigen Lösung $(x^*, y^*)^T \in [0, 1]^2$ für die Fixpunktgleichung folgt. Dabei sei \mathbb{R}^2 mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

- (c) Berechnen Sie einen Schritt der Fixpunktiteration mit $\alpha = -\frac{1}{4}$ und dem Startwert $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$ und bestimmen Sie mithilfe der a priori Abschätzung des Banach'schen Fixpunktsatzes die kleinste Anzahl von Iterationsschritten k für welche die Abschätzung

$$\left\| \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq 2^{-7}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 4

(1+1+4+3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Geben Sie die Definition des m -ten Krylov-Raums $\mathcal{K}_m(A, b)$ an.
- (b) Sei nun A regulär und $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass folgenden Aussagen äquivalent sind:
- Für $m = 1, \dots, n$ gilt $\dim \mathcal{K}_m(A, b) = 1$.
 - b ist ein Eigenvektor von A .
- (c) Für $m = 1, \dots, n - 1$ sei $\dim \mathcal{K}_m(A, b) = m$. Zeigen Sie:
Wenn $v \in \mathcal{K}_m(A, b)$ und $v \notin \mathcal{K}_{m-1}(A, b)$, dann gilt $Av \in \mathcal{K}_{m+1}(A, b)$ und $Av \notin \mathcal{K}_m(A, b)$.
- (d) Sei nun A symmetrisch und positiv definit. Geben Sie eine Fehlerabschätzung der m -ten Iterierten x_m des CG-Verfahrens für $Ax = b$ in Abhängigkeit der Konditionszahl $\kappa(A)$ von A an.

Aufgabe 5

(4+3 Punkte)

Der folgende noch lückenhafte MATLAB-Code soll das Gauß-Newton Verfahren ausführen.

```

1 function [x,n] = gauss_newton(f, df, x0, tol)
2 % Gauss-Newton
3 % -----
4 % INPUT      f      -      function handle der gegebenen Funktion f
5 %            df      -      function handle der Ableitung von f
6 %            x0      -      Startvektor
7 %            tol     -      Toleranz
8 % OUTPUT     x      -      Approximation
9 %            n      -      Anzahl der Iterationen
10 % -----
11 % Initialisierung
12 n = 0;
13 x = x0;
14 ndeltax = 2*tol;          % Initialisierung von ndeltax
15
16 % Schleife
17 while ( )
18     fx = feval(f,x);      % Auswertung von f an der Stelle x
19     dfx = feval(df,x);    % Auswertung von df an der Stelle x
20     deltax = dfx \ (-fx); % Lsg des Ausgleichsproblems
21     x =                    % Berechnung der neuen Iterierten
22                             % Berechnung von ndeltax
23     n = n+1;              % Anzahl der Iterationen
24 end

```

Um ein lauffähiges, korrektes Programm zu erhalten, muss in Zeile 21 die neue Iterierte berechnet werden. Zusätzlich muss die Variable `ndelta` in Zeile 22 auf den Wert $\|\Delta x\|_2$ gesetzt werden und in Zeile 17 zusammen mit der Toleranz `tol` in der Abbruchbedingung für die `while`-Schleife verwendet werden.

- (a) Geben Sie an, was in den Zeilen 17, 21 und 22 stehen muss, um das Gauß-Newton Verfahren korrekt zu programmieren.
- (b) Nennen Sie den Problemtyp, zu dessen Lösung das Gauß-Newton Verfahren verwendet wird und formulieren Sie allgemein ein solches Problem.

Musterlösung

Aufgabe: A1

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = (a_{je})_{je}$

Setze $r_j = \sum_{\substack{e=1 \\ e \neq j}}^n |a_{je}|$ und $D_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq r_j\}$

Dann gilt: $\lambda(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^n D_j$.

b) Kreise für A

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 6\}$
 $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 14| \leq 4\}$
 $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| \leq 2\}$

} alle Kreise sind disjunkt $\Rightarrow \lambda_{\max} \in D_1$
 $\lambda_{\min} \in D_3$

Kreise für A^T

$\tilde{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 4\}$
 $\tilde{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 14| \leq 5\}$
 $\tilde{D}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| \leq 3\}$

} alle Kreise sind disjunkt $\Rightarrow \lambda_{\max} \in \tilde{D}_1$
 $\lambda_{\min} \in \tilde{D}_3$

Beste Abschätzung $\lambda_{\max} \in \tilde{D}_1$, $\lambda_{\min} \in D_3$

c) Kreise sind disjunkt \Rightarrow 1 EW pro Kreis

Matrix A ist reell

\Rightarrow Komplexe EWe treten nur als komplex konjugierte Paare auf, die im selben Gerschgorin Kreis liegen, da für $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ $|\lambda_1 - r| = |\lambda_2 - r|$ gilt.

\Rightarrow Alle EWe von A müssen reell sein.

Aufgabe: Z

a) $\mu \in \mathbb{C}$ Shift, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Wähle $z_0 \neq 0$, $z_0 \in \mathbb{C}^n$, setze $y_0 = \frac{z_0}{\|z_0\|}$

Berechne LR-Zerlegung $(\mu I - A) = LR$

for $k=0, 1, \dots$ do

Löse $(\mu I - A) z_{k+1} = y_k$ mit LR-Zerlegung

$$y_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\|z_{k+1}\|}$$

$$s_k = y_{k+1}^H A y_{k+1}$$

end

b) A symmetrisch $\Rightarrow A = Q D Q^T$ mit Q orthogonal und $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Für $x \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x^T A x}{x^T x} &= \frac{x^T Q D Q^T x}{x^T Q Q^T x} \stackrel{w=Q^T x}{=} \frac{w^T D w}{w^T w} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k w_k^2}{\sum_{k=1}^n w_k^2} \leq \frac{\lambda_{\max} \sum_{k=1}^n w_k^2}{\sum_{k=1}^n w_k^2} = \lambda_{\max} \end{aligned}$$

Da für den EV v zu λ_{\max} Gleichheit gilt, ist die Gleichung erfüllt

c) Wähle Eigenwertapproximation $s_k = y_{k+1}^H A y_{k+1}$ als Shift für den nächsten Schritt.

Vorteil: schnellere Konvergenz, kubisch statt quadratisch

Nachteil: In jedem Schritt muss eine LR-Zerlegung berechnet werden.

Aufgabe: 3

a) Ω abgeschlossen, Φ Selbstabbildung, Φ Kontraktion

b) • $[0,1]^2$ abgeschlossene TM des \mathbb{R}^2

• Φ Selbstabb

Es gilt für $\alpha > 0$ und $x, y \in (0,1]$

$$\Phi_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\alpha}_{>0} \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y}_{>0} \\ x + \underbrace{\frac{1}{2}y^2}_{>0} \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\alpha \leq 0$, $x, y \in [0,1]$

$$\text{Es gilt } 1 + \alpha \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y \right) \leq 1$$

$$1 + \underbrace{\alpha}_{\leq 0} \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}y^2 \right)}_{\geq 0} \leq 1$$

und

$$1 + \underbrace{\alpha}_{\leq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y \right)}_{\leq 1} \geq 1 + \alpha$$

$$1 + \underbrace{\alpha}_{\leq 0} \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}y^2 \right)}_{\leq \frac{3}{2}} \geq 1 + \frac{3}{2}\alpha$$

≥ 0 , falls $\alpha \geq -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \Phi_\alpha$ ist Selbstabb auf $[0,1]^2$ für $\alpha \in [-\frac{2}{3}, 0]$

• Kontraktion

$$\Phi'_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x & \frac{1}{2} \\ 1 & y \end{pmatrix} \xrightarrow{x, y \in [0,1]} \Rightarrow \|\Phi'_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|_\infty \leq 2|\alpha| =: L$$

Φ_α ist Kontraktion auf $[0,1]^2$, falls

$$L < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{2}$$

Insgesamt existiert also für $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0]$ eine eindeutige Lösung.

$$c) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \phi_{1/4} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $L = 2|\alpha| = \frac{1}{2}$, daher

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_{\infty} &\leq \frac{L^k}{1-L} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{-k+1}} \end{aligned}$$

Also ist die Abschätzung für $k=8$ erfüllt.

Aufgabe: 4

$$a) \mathcal{K}_m(A, b) = \text{span} \{ b, Ab, A^2b, \dots, A^{m-1}b \}$$

b) Es gilt:

$$\dim \mathcal{K}_m(A, b) = 1 \quad \forall m = 1, \dots, n$$

$\Leftrightarrow b, Ab, \dots, A^{m-1}b$ sind linear abhängig,
insbesondere gilt $Ab = cb$.

$\Leftrightarrow b$ ist Eigenvektor von A .

c) Es gilt

$$v = \sum_{i=0}^{m-1} c_i A^i b \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}, \quad \text{da } v \in \mathcal{K}_m(A, b)$$

wegen $v \notin \mathcal{K}_{m-1}(A, b)$ gilt $c_{m-1} \neq 0$.

Damit

$$Av = \sum_{i=0}^{m-1} c_i A^{i+1} b = \sum_{k=1}^m c_{k-1} A^k b \in \mathcal{K}_{m+1}(A, b)$$

wegen $c_{m-1} \neq 0$ gilt $Av \notin \mathcal{K}_m(A, b)$

$$d) \quad \|x_m - x^*\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^m \|x_0 - x^*\|_A$$

Aufgabe: 5

a) 17: while (ndeltax > tol)
 21: x = x + deltax
 22: ndeltax = norm(deltax, 2)

b) Nicht lineares Ausgleichsproblem

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad m \geq n$$

$$\min g(x) := \frac{1}{2} \|f(x)\|_2^2$$