

Wieners
Numerische Mathematik 2

Dauer: 120 min. Lösung: keine

Aufgabe 1 (Kurzaufgaben)

2+2+2+2+2=10 Punkte

Beantworten Sie die folgenden Kurzaufgaben.

- Definieren Sie zu einer gegebenen Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = b$ den kubischen Spline-Raum \mathcal{S}_3 .
- Geben Sie für $S \in \mathcal{S}_3$ wie in a) die Anzahl der Unbekannten des linearen Gleichungssystems der Momente für die drei verschiedenen Randbedingungen an. Begründen Sie kurz.
- Geben Sie die Formel für die summierte Trapezregel zur Approximation von dem Integral $\int_a^b f(t)dt$ an.
- Es wird ein adaptives Quadraturverfahren zur Approximation $\int_a^b f(t)dt$ eingesetzt. Erläutern Sie, wie sich dieses adaptive Quadraturverfahren an einer Singularität der Funktion f verhält.
- Gegeben sei eine zirkuläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mit

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis des \mathbb{C}^N bestehend aus Eigenvektoren von C an.

Aufgabe 2 (Orthogonalpolynome)

5+3+2=10 Punkte

Die Chebychev-Polynome sind gegeben durch

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

- Zeigen Sie, dass die Chebychev-Polynome orthogonal bezüglich dem gewichteten L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_W$ mit $W(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sind und normalisieren Sie die Chebychev-Polynome bezüglich $\|\cdot\|_W = \sqrt{(\cdot, \cdot)_W}$.

Hinweis: Substituieren Sie geeignet und nutzen Sie

$$\cos(\eta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} (\cos(\eta - \theta) + \cos(\eta + \theta)).$$

- Geben Sie die Nullstellen $\xi_k^{(n)}$ von T_n mit $n > 0$ an und zeigen Sie, dass alle Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$ liegen.
- Gegeben sei nun $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Geben Sie die Best-Approximation von f in \mathbb{P}_2 bezüglich $\|\cdot\|_W = \sqrt{(\cdot, \cdot)_W}$ an.

Aufgabe 3 (Interpolation)

2+4+2+2=10 Punkte

Seien $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N$ und $f_0, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ gegeben. Eine Interpolationsaufgabe sucht ein Polynom $P_N \in \mathbb{P}_N$ mit

$$P_N(\xi_n) = f_n, \quad n = 0, \dots, N.$$

- a) Geben Sie die Newton-Basis von \mathbb{P}_N an.
- b) Verwenden Sie dividierte Differenzen, um das Interpolationspolynom $P_2(t)$ zu folgenden Daten

n	0	1	2
ξ_n	0	$\frac{1}{2}$	1
f_n	0	1	$\frac{3}{2}$

zu berechnen.

Hinweis: Sie müssen das Polynom $P_2(t)$ nicht in Monom-Darstellung bringen.

- c) An der Stelle $\xi_3 = 2$ wird ein zusätzlicher Wert $f_3 = 0$ vorgegeben. Berechnen Sie das neue Interpolationspolynom $P_3(t)$.
- d) Nennen Sie zwei Nachteile der Lagrange-Darstellung.

Aufgabe 4 (Quadratur)

1+2+5=8 Punkte

Gegeben seien das uneigentliche Integral und das Skalarprodukt

$$I_W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-t^2) dt, \quad (u, v)_W = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) \exp(-t^2) dt.$$

Die zugehörigen Orthogonalpolynome heißen Hermite-Polynome H_n . Die Formel für die Gauß-Hermite-Quadratur ist gegeben durch

$$\hat{I}_W(f) = \sum_{j=1}^N \omega_j f(\xi_j).$$

- a) Geben Sie die Stützstellen ξ_j in der Gauß-Hermite-Quadraturformel an.
Hinweis: Sie müssen die Stützstellen nicht explizit berechnen. Achten Sie außerdem auf den Zählindex $j = 1, \dots, N$.
- b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Gewichte ω_j an und erläutern Sie die diese.
- c) Zeigen Sie, dass die Quadraturformel exakt für Polynome bis zum Grad $2N - 1$ ist.

Aufgabe 5 (Fouriertransformation)

5+3=8 Punkte

Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\omega_N = \exp(i\frac{2\pi}{N})$ die N -te Einheitswurzel. Die Fouriermatrix ist definiert durch $F_N = (\omega_N^{jk})_{j,k=0,\dots,N-1} \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Zu gegebenen Fourierkoeffizienten $\alpha \in \mathbb{C}^N$ lassen sich dann die Werte $f \in \mathbb{C}^N$ bestimmen mit

$$f = F_N \alpha.$$

Des Weiteren gilt $F_N \overline{F}_N = NI_N$ (Muss nicht gezeigt werden).

a) Zu $f, g \in \mathbb{C}^N$ sei die diskrete zirkuläre Faltung definiert durch

$$(f * g)_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_{k-j} g_j, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

wobei f, g periodisch fortgesetzt werden. Zeigen Sie, dass

$$\overline{F}_N(f * g) = (\overline{F}_N f) \cdot (\overline{F}_N g),$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite komponentenweise zu verstehen ist.

b) Geben Sie den Aufwand der obigen Faltungsoperation an und erläutern Sie, unter welchen Bedingungen sich dieser verbessern lässt.