

Hochbruck  
Numerik 2

Dauer: 90 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 20 P.  
Bemerkungen: 10 Punkte pro Aufgabe, Hilfsmittel: 1 handbeschriebene DIN-A4-Seite

**Aufgabe 1:** (weiß)

Es seien  $A, X_0 \in \mathbb{R}^{d,d}$  symmetrische und positiv definite Matrizen mit  $AX_0 = X_0A$ . Wir betrachten die Iterationsvorschrift

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} (X_n + X_n^{-1}A), \quad n = 0, 1, \dots$$

- Zeigen Sie, dass für  $d = 1$  die Iterationsvorschrift dem Newton-Verfahren angewandt auf  $f(x) = x^2 - A$  entspricht.
- Zeigen Sie, dass die Iterierten  $X_n$  symmetrisch und positiv definit sind sowie  $AX_n = X_nA$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Hinweis: Es gilt  $X_n^{-1}A = X_n^{-1/2} (X_n^{-1/2}AX_n^{1/2}) X_n^{-1/2}$ .

- Bestimmen Sie den Grenzwert für den Fall, dass die Folge konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede symmetrische, positiv definite Matrix  $B \in \mathbb{R}^{d,d}$  eine eindeutige, symmetrische, positiv definite Matrixwurzel  $B^{1/2} \in \mathbb{R}^{d,d}$  existiert.

**Aufgabe 2:** (gelb)

- Schreiben Sie eine Funktion `hessenberg(A, n)` (z.B. in Python oder in Pseudocode), welche eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  so *effizient* wie möglich mit einer unitären Ähnlichkeitstransformation auf obere Hessenberg-Form transformiert.

Für die Transformationen dürfen Sie eine Funktion  $(v, \beta, \alpha) = \text{house}(x)$  verwenden, die Ihnen einen Vektor  $v$  und Skalare  $\alpha, \beta$  liefert, so dass  $Qx = \alpha e_1$  gilt, wobei  $Q = I - \beta vv^T$  die zugehörige Householder-Matrix bezeichnet.

- Gegeben sei eine beliebige Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^4$  mit Elementen  $a_{ij} \neq 0, i, j = 1, \dots, 4$ . Begründen Sie, ob sich die Matrizen

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & \times & \times \\ \times & 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

aus der Matrix  $A$  durch Multiplikation mit *einer* Householder-Matrix von rechts und *einer* Householder-Matrix von links erzeugen lassen.

### Aufgabe 3: (rosa)

- a) Berechnen und skizzieren Sie mit Hilfe des Satzes von Gershgorin (bzw. Varianten davon) eine möglichst kleine Menge, die alle Eigenwerte der Matrix  $A$  enthält, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- b) Schätzen Sie mit den Resultaten aus Aufgabenteil a) möglichst genau die Konvergenzgeschwindigkeit der Potenzenmethode zur Approximation des betragsgrößten Eigenwerts  $\lambda_1$  der Matrix  $A$  aus a) ab, d.h., bestimmen Sie  $\hat{\eta}$  so, dass für den Rayleigh-Quotienten  $\rho_k$  im  $k$ -ten Schritt

$$|\rho_k - \lambda_1| \leq C \hat{\eta}^k$$

für eine Konstante  $C > 0$  gilt.

- c) Es sei eine normale Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  mit Eigenwerten  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , gegeben. Für die Eigenwerte gelte  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Folge der Rayleigh-Quotienten zu den Vektoren aus der Potenzenmethode konvergiert für jeden Startwert  $x_0 \neq 0$  gegen  $\lambda_1$ .

### Aufgabe 4: (grün)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b = e_1$  mit zirkulanter Shiftmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} = [e_2 \ \dots \ e_n \ e_1] \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

- a) Zeigen Sie, dass das Arnoldi-Verfahren angewandt auf die Matrix  $A$  und den Vektor  $b$  die Basen (in Matrixnotation)

$$V_m = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m], \quad m = 1, \dots, n,$$

liefert. Geben Sie alle Matrizen  $\tilde{H}_m$  aus dem Arnoldi-Verfahren (also aus der Krylov-Rekursion  $AV_m = V_{m+1}\tilde{H}_m$ ) explizit an.

- b) Zeigen Sie, dass für die Iterierten des GMRES-Verfahrens angewandt auf  $Ax = b$  mit Startwert  $x_0 = 0$  gilt

$$x_m = x_0, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad x_n = A^{-1}b = e_n.$$

- c) Was gilt für die Iterierten  $x_m, m = 1, \dots, n$ , des FOM-Verfahrens angewandt auf  $Ax = b$  mit Startwert  $x_0 = 0$ ?

Lösung von Aufgabe 1:

- a) Für  $d = 1$  ist  $f'(x) = 2x$ . Das Newton-Verfahren angewandt auf die Funktion  $f(x) = x^2 - A$  ergibt somit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n) \\ &= x_n - (2x_n)^{-1} (x_n^2 - A) = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{A}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

- b) Der Beweis erfolgt per vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Nach Voraussetzung erfüllt  $X_0$  die geforderten Eigenschaften.

Induktionsschritt:  $n \rightsquigarrow n + 1$

Da  $AX_n = X_n A$  nach Induktionsvoraussetzung, gilt auch  $X_n^{-1} A = A X_n^{-1}$  ( $X_n$  regulär, da positiv definit) und somit

$$\begin{aligned} A X_{n+1} &= \frac{1}{2} (A X_n + A X_n^{-1} A) \\ &= \frac{1}{2} (X_n A + X_n^{-1} A A) = \frac{1}{2} (X_n + X_n^{-1} A) A = X_{n+1} A. \end{aligned}$$

Die Symmetrie gilt, da

$$X_{n+1}^T = \frac{1}{2} (X_n^T + (X_n^{-1} A)^T) = \frac{1}{2} (X_n + A^T (X_n^{-1})^T) = \frac{1}{2} (X_n + X_n^{-1} A) = X_{n+1}$$

wegen der Symmetrie von  $X_n$  (und damit auch  $X_n^{-1}$ ) und  $X_n^{-1} A = A X_n^{-1}$  nach Induktionsvoraussetzung und der Symmetrie von  $A$ .

Da  $A$  nur positive Eigenwerte hat (da symmetrisch und positiv definit), hat auch

$$X_n^{-1} A = X_n^{-1/2} (X_n^{-1/2} A X_n^{1/2}) X_n^{-1/2} \quad (\text{Hinweis})$$

als Ähnlichkeits- und Kongruenztransformation von  $A$  nur positive Eigenwerte (aber nicht dieselben). Da  $X_n^{-1} A$  außerdem symmetrisch ist, ist  $X_n^{-1} A$  somit auch positiv definit. Damit ist  $X_{n+1} = \frac{1}{2} (X_n + X_n^{-1} A)$  als Summe zweier positiv definiten Matrizen ebenfalls positiv definit.

- c) Die Iterationsvorschrift ist äquivalent zu

$$X_n X_{n+1} = \frac{1}{2} (X_n^2 + A), \quad n = 0, 1, \dots$$

Falls die Folge konvergiert, gilt also für den Grenzwert  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$

$$X^2 = \frac{1}{2} (X^2 + A) \iff X^2 = A.$$

Da ferner nach Aufgabenteil b) alle Iterierten  $X_n$  symmetrisch und positiv definit sind, ist der Grenzwert  $X$  symmetrisch und positiv semidefinit, da für alle  $v \in \mathbb{C}^n$  gilt:

$$0 < v^H X_n v \rightarrow v^H X v \geq 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Da zusätzlich  $X^2 = A$  symmetrisch und positiv definit ist, muss  $X$  ebenfalls positiv definit sein. Somit handelt es sich bei dem Grenzwert  $X$  um die eindeutig bestimmte positiv definite Wurzel  $A^{1/2}$  von  $A$  (Hinweis).

**Lösung von Aufgabe 2:**

Notation: Für  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  wird mit  $A_{m,i:j}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n, 1 \leq m \leq n$ ) die Teilmatrix

$$A_{m,i:j} = [a_{m,i} \ a_{m,i+1} \ \dots \ a_{m,j}]$$

bezeichnet.

a) Variante 1:

---

```

function HESSENBERG(A, n)
  for k = 1, ..., n - 2 do
    Berechne v, β, α = HOUSE(Ak+1:n,k)
    Setze Ak+1,k = α, Ak+2:n,k = 0
    Setze Ak+1:n,k+1:n = Ak+1:n,k+1:n - v (β(vT Ak+1:n,k+1:n))
    Setze A1:n,k+1:n = A1:n,k+1:n - (β(A1:n,k+1:n v)) vT
  end for
  return A
end function

```

---

Variante 2 (nur mit Vektor-Operationen):

---

```

function HESSENBERG(A, n)
  for k = 1, ..., n - 2 do
    Berechne v, β, α = HOUSE(Ak+1:n,k)
    Setze Ak+1,k = α, Ak+2:n,k = 0
    for j = k + 1, ..., n do
      Setze Ak+1:n,j = Ak+1:n,j - (β(vT Ak+1:n,j)) v
    end for
    for j = 1, ..., n do
      Setze Aj,k+1:n = Aj,k+1:n - (β(Aj,k+1:n v)) vT
    end for
  end for
  return A
end function

```

---

b) Wir definieren  $\tilde{I}_n = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Hierbei handelt es sich um eine Householder-Matrix, denn  $\tilde{I}_n = I - 2e_1 e_1^T$ .

Die Matrix  $B_1$  kann auf die geforderte Art erzeugt werden: Es sei  $x^T$  die erste Spalte der Matrix  $A$ . Definiert man die Householder-Matrix  $Q$  durch

$$Qx = \alpha e_1 \quad \text{mit } \alpha = \pm \|x\|,$$

so ergibt sich

$$AQ = \tilde{B}_1,$$

wobei  $\tilde{B}_1$  die für  $B_1$  geforderte Struktur hat. Multipliziert man von links mit der Householder-Matrix  $\tilde{I}_4$ , so erhält diese die Struktur der Matrix und

$$B_1 = \tilde{I}_4 \tilde{B}_1 = \tilde{I}_4 A Q$$

besitzt ebenfalls die geforderte Struktur.

Die Matrix  $B_2$  kann ebenfalls erzeugt werden: Man kann zur Multiplikation von rechts die Matrix  $Q$  wie für  $B_1$  verwenden und es ergibt sich analog

$$AQ = \tilde{B}_1,$$

wobei  $\tilde{B}_1$  die gleiche Struktur wie  $B_1$  besitzt. Wir bezeichnen mit  $\tilde{b}_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ , die Elemente der Matrix  $\tilde{B}_1$ . In dem Fall, dass  $\tilde{B}_1$  bereits die für  $B_2$  geforderte Struktur besitzt, kann zur Multiplikation von Links  $P = \tilde{I}_4$  verwendet werden. Andernfalls kann man eine Matrix der Form

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{P} \end{bmatrix}$$

verwenden, wobei  $\tilde{P}$  eine Householder-Matrix ist, so dass

$$\tilde{P} \begin{bmatrix} b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \alpha = \pm \left\| \begin{bmatrix} b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{bmatrix} \right\|$$

gilt. In beiden Fällen besitzt  $B_2 = PAQ$  die gewünschte Struktur.

### Lösung von Aufgabe 3:

a) Wir definieren für  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{C}$

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Mit dem Satz von Gershgorin gilt für die Matrix  $A$

$$\lambda(A) \subseteq M_1 = \{8\} \cup B_6(-3) \cup B_2(-3) \cup B_3(2).$$

Für die Matrix  $A^T$  gilt

$$\lambda(A^T) \subseteq M_2 = B_3(8) \cup B_3(-3) \cup B_3(-3) \cup B_2(2).$$

Der Schnitt der beiden Mengen ergibt

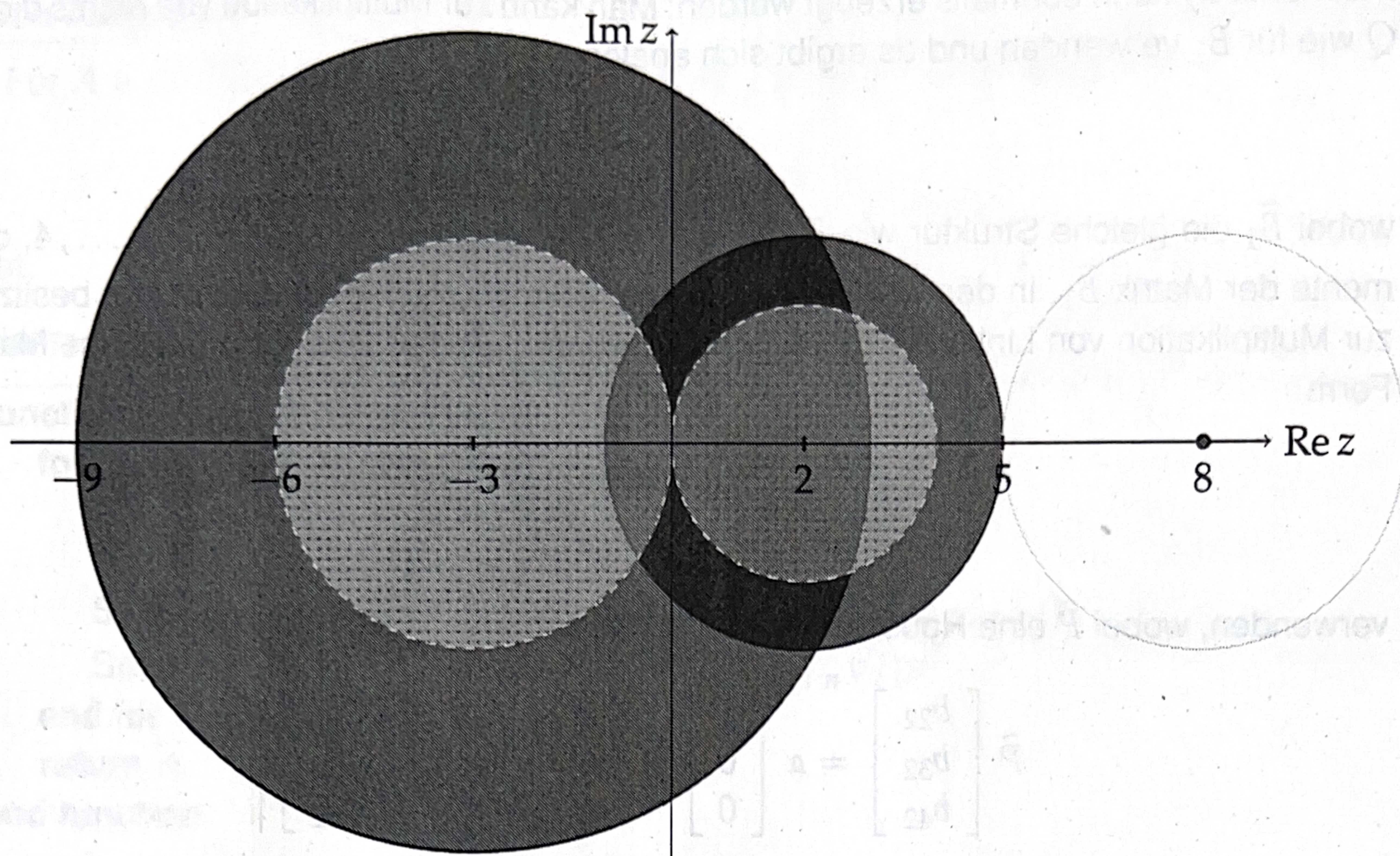
$$M_1 \cap M_2 = \{8\} \cup B_3(-3) \cup B_2(2) \cup \{5\}.$$

Mit der Verschärfung des Satzes von Gershgorin (Satz 6.16) kann 5 als Eigenwert ausgeschlossen werden: Da der Gershgorinkreis  $\{8\}$  von  $A$  disjunkt zu allen anderen Gershgorinkreisen von  $A$  ist, folgt direkt, dass 8 ein einfacher Eigenwert ist. Somit kann der Gershgorinkreis  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 8| \leq 3\}$  von  $A^T$ , der disjunkt zu allen anderen Gershgorinkreisen von  $A^T$  ist, nur den Eigenwert 8 und somit keinen weiteren Eigenwert bei 5 enthalten.

Insgesamt ergibt sich die kleinstmögliche Menge, die die Eigenwerte von  $A$  enthält, zu

$$\lambda(A^T) = \lambda(A) \subseteq M_3 = \{8\} \cup B_3(-3) \cup B_2(2).$$

Skizze der Mengen  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  (gepunktet)



b) Wir nehmen an, die Eigenwerte sind betragsmäßig sortiert:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4|.$$

Für die Potenzenmethode gilt nach einem Satz aus der Vorlesung (Satz 6.24)

$$\rho_A(y_k) = \lambda_1 + \mathcal{O}(\eta^k), \quad \eta = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}.$$

Aus Teil a) wissen wir, dass

$$\lambda_1 = 8 \quad \text{und} \quad |\lambda_i| \leq 6 \quad \text{für } i = 2, 3, 4.$$

Damit lässt sich das Verhältnis zwischen dem betragsmäßig zweitgrößtem und größtem Eigenwert abschätzen durch

$$\eta = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \leq \frac{6}{8} = \frac{3}{4} =: \hat{\eta}$$

und wir erhalten

$$|\rho_A(y_k) - \lambda_1| \leq C \left(\frac{3}{4}\right)^k = C \hat{\eta}^k.$$

c) Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel gilt für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dass  $y_k = A^k x_0 = x_0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist und somit

$$\rho(y_k) = \lambda_2 = 1 \not\rightarrow 2 = \lambda_1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Lösung von Aufgabe 4:

Für die zirkulante Shiftmatrix  $A$  gilt  $Ae_j = e_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , und  $Ae_n = e_1$ .

a) Wir beweisen  $v_j = e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Es ist  $\beta = \|b\| = 1$  und  $v_1 = b = e_1$ .

Induktionsschritt:  $m \rightsquigarrow m+1$  für ein  $m < n$ . Es gelte also  $V_m = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_m]$ . Dann gilt

$$h_{j,m} = v_j^H Av_m = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

und somit

$$\tilde{v}_{m+1} = Av_m - \sum_{j=1}^m h_{j,m} v_j = Av_m = Ae_m = e_{m+1}$$

Da  $h_{m+1,m} = \|\tilde{v}_{m+1}\| = 1$ , folgt  $v_{m+1} = e_{m+1}$ .

Für die Matrizen  $\tilde{H}_m$  gilt: Aus der Induktion folgt für  $m = 1, \dots, n-1$

$$\tilde{H}_m = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Für  $m = n$  gilt wegen  $Av_n = e_1$

$$h_{j,n} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ 0, & j = 2, \dots, n+1, \end{cases}$$

und damit

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Aus dem Arnoldi-Prozess im GMRES-Verfahren ergeben sich dieselben Matrizen  $V_m$  und  $\tilde{H}_m$ ,  $m = 1, \dots, n$ , wie in Aufgabenteil a), da  $x_0 = 0$  und somit  $r_0 = b$  ist.

Im GMRES-Verfahren wird  $y_m$  so gewählt, dass

$$\|\tilde{H}_m y_m - \beta e_1\| = \|\tilde{H}_m y_m - e_1\| = \min.$$

Für  $m < n$  gilt somit  $y_m = 0$  und deshalb  $x_m = V_m y_m = 0$ .

Für  $m = n$  ist  $y_n = e_n$  und damit ebenfalls  $x_n = e_n$ . (Alternativ: Ein Krylov-Verfahren angewendet auf eine reguläre Matrix der Dimension  $n$  liefert nach höchstens  $n$  Schritte die exakte Lösung nach Lemma 7.4.)

c) Analog zu b) gilt, dass sich im Arnoldi-Prozess des FOM-Verfahrens dieselben Matrizen  $V_m$  und  $\tilde{H}_m$ ,  $m = 1, \dots, n$ , wie in Aufgabenteil a) ergeben.

Im FOM-Verfahren wird  $y_m$  so gewählt, dass  $y_m = \beta H_m^{-1} e_1 = H_m^{-1} e_1$  ist (Satz 7.7).

Da  $H_m$  für  $m < n$  singulär ist, existieren  $y_m$  und somit auch die FOM-Iterierten  $x_m = V_m y_m$  nicht für  $m < n$ .

Für  $m = n$  ist  $H_m = A$  regulär, und es gilt  $x_n = e_n$ . (Alternativ: Ein Krylov-Verfahren angewendet auf eine reguläre Matrix der Dimension  $n$  liefert nach höchstens  $n$  Schritte die exakte Lösung nach Lemma 7.4.)