Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Jahnke
Numerische Mathematik II

Dauer: 90 min. Lösung: keine

Aufgabe 1 — $2 + 1 + 2 + 1 = 6$ Punkte

Sei $f \in C^2([a,\infty))$ mit Nullstelle $x^* \in [a,\infty)$. Es gelte zudem

$$f'(x) > 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x) \geq 0$$

für alle $x \in [a,\infty)$.
Wir betrachten das Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 \in [a,\infty)$. Die Iterierten des Newton-Verfahrens bezeichnen wir mit x_n.

(a) Die Voraussetzungen an die Funktion f implizieren unter anderem

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

für alle $x; y \in [a,\infty)$. *(Das sollen Sie nicht zeigen!)*
Zeigen Sie damit $x^* \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen x^* konvergiert.

(d) Erklären Sie, inwiefern sich der Konvergenzbereich (gemeint ist die Menge der Startwerte, sodass das zugehörige Newton-Verfahren konvergiert) hierbei von dem unterscheidet, was Sie im Allgemeinen vom Newton-Verfahren erwarten würden.

Aufgabe 2 — $2 + 2 + 1 + 4 = 9$ Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & & & \\ -\mathrm{i} & -2 & (2+\sqrt{5}\,\mathrm{i}) & & \\ & (2-\sqrt{5}\,\mathrm{i}) & 6 & & \\ & & & 0 & 9+12\mathrm{i} \\ & & & 9-12\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Hinweis: Nicht aufgeführte Einträge der Matrix sind 0.

(a) Geben Sie einen Vektor $b \in \mathbb{C}^5$ an, sodass der Krylov-Raum $\mathcal{K}_k(A,b)$ für $k=4$ genau die Dimension 3 hat. Begründen Sie Ihre Wahl des Vektors b.

(b) Bestimmen Sie die Gershgorin-Kreisscheiben $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_5$ der Matrix A konkret.
Hinweis: $9^2 + 12^2 = 15^2$

(c) Welche Aussage über das Spektrum $\lambda(A)$ liefert der Satz von Gershgorin konkret für die hier gegebene Matrix A? Vereinfachen Sie die Aussage soweit wie möglich.
Hinweis: Eine Skizze kann eventuell hilfreich sein.

(d) Betrachten Sie die Struktur der Matrix A und treffen Sie genauere Aussagen über das Spektrum $\lambda(A)$ der Matrix A **ohne** dabei die Eigenwerte explizit zu berechnen.

Aufgabe 3 **4 + 2 = 6 Punkte**

(a) Erklären Sie, auf welches mathematische Problem die Bestimmung eines Webseiten-Rankings wie beim PageRank-Algorithmus führt. Nennen Sie zwei wichtige Eigenschaften der im Problem auftretenden Matrix.

Erklären Sie auch kurz, wodurch sich eine sinnvolle Lösung dieses Problems auszeichnet.

Hinweis: Sie sollen nicht die Herleitung des mathematischen Problems erklären!

(b) Erklären Sie, wie Sie das in (a) beschriebene Problem numerisch lösen würden, wenn Sie von einem Netzwerk mit etwa 1 Millionen Webseiten ausgehen.

Aufgabe 4 **2 + 2 + 3 = 7 Punkte**

(a) Erklären Sie, warum Ähnlichkeitstransformationen auf obere Hessenberg-Form beim QR-Algorithmus mit **Einfach**-Shifts eine Aufwandsreduktion ermöglichen.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer **reellen** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ an, bei der die Wahl des Einfach-Shifts $\mu_k = a_{nn}^{(k)}$ im k-ten Schritt keine Konvergenz des QR-Algorithmus mit Shift zur Folge hat. Dabei bezeichnen $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^{n}$ die Iterierten des Algorithmus.

Erklären Sie, warum der QR-Algorithmus nicht wie gewünscht konvergiert.

(c) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine obere Hessenberg-Matrix.

Erläutern Sie, welches Problem auftritt, wenn man den QR-Algorithmus mit **mehrfachen** Shifts auf A anwendet, und nennen Sie den Ansatz, mit dem dieses Problem vermieden werden kann.

Aufgabe 5 **2 + 4 + 2 = 8 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Wir betrachten das LGS $Ax = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$ mit Lösung $\widehat{x} = e_n = (0, \dots, 0, 1)^\top$.

(a) Bestimmen Sie für $m = 1, \dots, n-1$ eine Orthonormalbasis des m-ten Krylov-Raums $\mathcal{K}_m(A, e_1)$.

(b) Mit x_m bezeichnen wir die GMRES-Iterierten zum Gleichungssystem $Ax = e_1$. Zeigen Sie, dass für die Fehler die Gleichungen

$$\begin{aligned} \|\widehat{x} - x_m\|_2 &= 1, & m &= 1, \dots, n-1, \\ \|\widehat{x} - x_m\|_2 &= 0, & m &= n, \end{aligned}$$

gelten.

(c) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass die Lösung des Gleichungssystems $BAx = Be_1$ bereits im Krylov-Raum $\mathcal{K}_1(BA, Be_1)$ liegt.

Aufgabe 6 **6 Punkte**

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine 2π-periodische Funktion und sei $N \geq 4$ gerade. Laut Vorlesung interpoliert das trigonometrische Polynom

$$p_N(x) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \widehat{f}_N(k) e^{ikx}$$

die Funktion f in den Knoten $\xi_j = 2\pi j/N$ für $j = 0, \dots, N-1$.
Zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler die Abschätzung

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{C}{N}$$

mit einer von N unabhängigen Konstanten $C \geq 0$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{m-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ gilt.