Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. Marlis Hochbruck

Studienbegleitende Klausur zur Vorlesung Numerik II 30.03.2011

Hinweise:

- Es werden nur Lösungsvorschläge gewertet, bei denen der Lösungsweg klar zu erkennen ist. Die Angabe des Endresultats alleine gibt keine Punkte.
- Beginnen Sie mit den Aufgaben, die Ihnen am einfachsten erscheinen.
- In jeder Aufgabe können maximal acht Punkte erreicht werden. Zum Bestehen dieser Klausur sind **24** Punkte hinreichend.

Anmerkung: Zu dieser Klausur liegt der Fachschaft keine Lösung vor.

Aufgabe 1:

Es seien die Funktionswerte $y_j = f(x_j)$ einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem äquidistanten Gitter $x_j = 2\pi j/N$ für $j = 0, \ldots, N-1$ mit N gerade gegeben.

(a) Bestimmen Sie das trigonometrische Interpolationspolynom t_N mit $t_N(x_j) = y_j$ für $j = 0, \ldots, N-1$.

(b) Es sei $y = (y_j)_{j=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$. Finden Sie eine Matrix $A_N \in \mathbb{C}^{N,N}$, für die

$$(A_N y)_k = t_N''(x_k) \approx f''(x_k), \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

gilt, wobei $(A_N y)_k$ den k-ten Eintrag des Vektors $A_N y$ bezeichnet.

(c) Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix A_N sowie $\|A_N\|$ an. Wie verhält sich $\|A_N\|$ für $N \to \infty$?

Aufgabe 2:

Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

(a) Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Potenzenmethode zur Approximation von λ_1? Was können Sie über die Konvergenzgeschwindigkeit sagen?

(b) Beantworten Sie die Fragen aus (a) unter der Voraussetzung, dass A normal ist.

(c) Es seien $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Wie muss man den Shift μ wählen, damit die Konvergenzgeschwindigkeit der inversen Potenzenmethode mit Shift zur Approximation von λ_1 schneller ist als die der Potenzenmethode.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

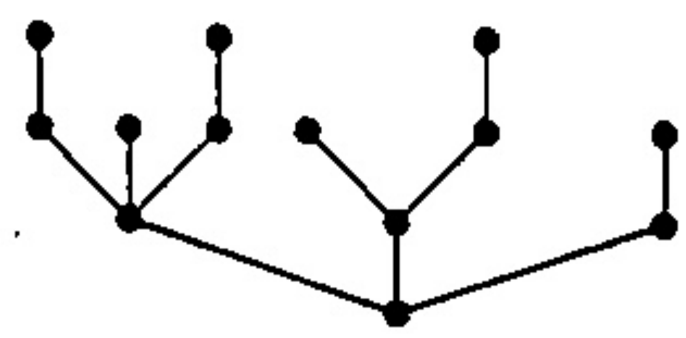
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Führen Sie einen Schritt des Arnoldi-Verfahrens durch und geben Sie die Matrizen V_1, V_2 und $\widetilde{H}_1$ in der Gleichung $AV_1 = V_2\widetilde{H}_1$ explizit an.

(b) Geben Sie die Näherungen $x_1^M = V_1 y_1^M$ und $x_1^G = V_1 y_1^G$ an, die sich aus der Minimierungsbedingung (M) respektive der Galerkin-Bedingung (G) ergeben. Benennen Sie die beiden von Ihnen angewendeten Verfahren..

Aufgabe 4:

(a) Gegeben sei der Baum



τ

Geben Sie für diesen Baum die Ordnungsbedingung für Runge–Kutta–Verfahren und das elementare Differential an.

(b) Geben Sie den Baum an, der zu der Ordnungsbedingung

$$\sum b_i a_{ij} a_{jk} a_{jl} a_{jm} a_{in} a_{no} a_{op} a_{oq} a_{or} a_{is} a_{st} = \frac{1}{960}$$

gehört.

(c) Im folgenden Tableau sind die Koeffizienten eines Runge-Kutta-Verfahrens angegeben.

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Geben Sie das Runge-Kutta-Verfahrens explizit an und bestimmen Sie dessen Ordnung mit Hilfe der Ordnungsbedingungen.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Matrizen

$$A_n = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \Delta x = \frac{1}{n+1}, \qquad n = 2,3,\ldots.$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gershgorin eine Approximation an die Konditionszahl $\kappa(A_n)$.

(b) Wieviele Schritte des cg-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A_n x = b$ muss man ausführen, um den Fehler des Startvektors $\|x_0 - \hat{x}\|_A$ ungefähr um den Faktor 10^{-4} zu verkleinern?

(c) Betrachten Sie nun das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -A_n y(t), \qquad y(0) = y_0.$$

Wie groß darf man die Schrittweite wählen, damit das explizite Euler-Verfahren zur Lösung dieser Gleichung stabil bleibt?

Hinweis: Es genügt, die Abschätzungen aus (a) zu verwenden.

Aufgabe 6:

Kreuzen Sie bei *maximal 8* der folgenden Aussagen an, ob sie jeweils wahr oder falsch sind.

Es sei eine nicht singuläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeben. Ferner sei $\hat{x}$ eine Lösung von $Ax = b$ und der Startwert $x_0 = 0$ gewählt.

[W] [F] Die Lösung $\hat{x}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist eindeutig bestimmt.

[W] [F] Es gibt einen Index $m \leq n$ so, dass $\hat{x} \in \mathcal{K}_m(A, b)$.

[W] [F] Die m-te Iterierte des FOM-Verfahrens minimiert die Residuennorm im Raum $\mathcal{K}_m(A, b)$.

[W] [F] Die m-te Iterierte des QMR-Verfahrens minimiert die Residuennorm im Raum $\mathcal{K}_m(A, b)$.

[W] [F] Ist $A = A^T$ positiv definit, so minimiert die m-te Iterierte des FOM-Verfahrens die Residuennorm im Raum $\mathcal{K}_m(A, b)$ in der A^{-1}-Norm.

[W] [F] Ist $A = A^T$ positiv definit, so minimiert die m-te Iterierte des QMR-Verfahrens die Residuennorm im Raum $\mathcal{K}_m(A, b)$.

[W] [F] Mit dem Arnoldi-Verfahren berechnet man eine Basis von $\mathcal{K}_m(A, b)$ für jedes $m = 1, 2, \ldots, \text{Rang}(A)$.

[W] [F] Der Gesamtaufwand des Lanczos-Verfahrens wächst linear mit der Anzahl der Iterationsschritte.

[W] [F] Der Satz von Bendixson liefert ein Rechteck, in dem alle Eigenwerte von A enthalten sind.

[W] [F] Mit Hilfe des Satzes von Gershgorin, kann man einen Kreis konstruieren, in dem alle Eigenwerte von A enthalten sind.

Hinweis zur Bewertung:

Wenn Sie mehr als 8 Aufgaben bearbeiten, werden die ersten 8 bearbeiteten Aufgaben gewertet. Sie erhalten für jede richtige Antwort 1 Punkt, für jede falsche −1 Punkte und 0 Punkte, wenn Sie keine Antwort geben. Die minimale Gesamtpunktzahl beträgt 0 Punkte.