

## Numerik II, WS15/16 Nach

### Aufgabe 1: (weiß)

- a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren angewandt auf die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

für Startwerte  $x_0$  mit  $|x_0| > 1$  divergiert. Was passiert für  $|x_0| = 1$ ?

- b) Erläutern Sie, wie man mithilfe des Newton-Verfahrens den Wert von  $\sqrt{3}$  mit einer Folge rationaler Zahlen  $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{Q}$  approximieren kann und beweisen Sie die Konvergenz der Folge für Startwerte  $x_0$  mit  $x_0 \geq \sqrt{3}$ .

### Aufgabe 2: (gelb)

Schreiben Sie eine Funktion (in Matlab oder in Pseudocode), welche  $N$  Iterationen der inversen Potenzenmethode mit Shift  $\mu$  für die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  und Startwert  $y_0$  **effizient** durchführt. Dabei sollen Näherungen  $\rho_N$  für den größten Eigenwert und  $y_N$  für den zugehörigen Eigenvektor berechnet werden. Geben Sie außerdem den Gesamtaufwand (in Additionen und Multiplikationen) für  $N$  Iterationen an. Konstanten können hierbei vernachlässigt werden.

Eingabedaten:  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $y_0 \in \mathbb{C}^n$ ;      Ausgabedaten:  $y_N \in \mathbb{C}^n$ ,  $\rho_N \in \mathbb{C}$

Hinweis: Sie dürfen Funktionen wie zum Beispiel

$$\begin{aligned} [Q, R] &= \text{qr}(A) \\ [L, U] &= \text{lu}(A) \\ [V, D] &= \text{eig}(A) \\ x &= \text{solve}(A, b) \end{aligned}$$

verwenden ohne den Code anzugeben. Berücksichtigen Sie diese wenn Sie den Gesamtaufwand bestimmen.

**Aufgabe 3:** (rosa)

- a) Seien eine symmetrische, positiv definite Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  und eine Suchrichtung  $p \in \mathbb{R}^n$  mit  $b, p \neq 0$  gegeben. Weiterhin sei

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b.$$

Zeigen Sie, dass für

$$\alpha = \frac{r^T p}{p^T A p}, \quad r = b - Ax$$

die Funktion  $\psi(\alpha) = \phi(x + \alpha p)$  minimal wird.

- b) Seien  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $x, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $b, x \neq 0$  mit  $Ax = b$ . Zeigen Sie, dass aus  $x \in \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(A, b)$  folgt, dass  $\mathcal{K}_m$  ein  $A$ -invarianter Unterraum ist, also  $\mathcal{K}_{m+1} = \mathcal{K}_m$  gilt.

Hinweis: Arbeiten Sie mit der Definition des Krylovraums.

**Aufgabe 4:** (grün)

- a) Finden Sie mit dem Satz von Gershgorin eine möglichst kleine Menge, die das Spektrum der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

enthält.

- b) Gegeben sei die Matrix

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren ein Intervall  $I = (a, b]$  so, dass  $\lambda_3 \in I$  und  $b - a \leq 1$  gilt. Starten Sie den Algorithmus mit  $I_0 = (10, 12]$ .

Hinweise (dürfen ohne Beweis verwendet werden):  $\lambda_3$  ist der einzige Eigenwert in  $I_0$  und für  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq \alpha_1^{-1}$ ,  $\alpha_3 \in \mathbb{R}$  sind die Diagonalelemente der  $LDL^H$ -Zerlegung von

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 \end{bmatrix} = LDL^H, \quad D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3),$$

rekursiv gegeben durch

$$d_1 = \alpha_1, \quad d_2 = \alpha_2 - d_1^{-1}, \quad d_3 = \alpha_3 - d_2^{-1}.$$

### **Aufgabe 5:** (blau)

Geben Sie bei maximal 8 der folgenden 10 Aussagen an, ob sie jeweils wahr oder falsch sind, indem Sie die Nummer der Aussage in den entsprechenden Kasten auf dem blauen Blatt eintragen.

Es sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und ein beliebiger Vektor  $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gegeben.

- 1)  $A$  kann mit einer unitären Ähnlichkeitstransformation auf obere Dreiecksform transformiert werden.
- 2) Ist  $A$  normal, dann sind alle Eigenwerte von  $A$  reell.
- 3) Ist  $A$  normal, dann gibt es eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ .
- 4) Ist  $A$  normal, dann sind die Eigenwerte von  $A$  paarweise verschieden.
- 5) Der Satz von Gershgorin liefert eine Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , welche alle Eigenwerte von  $A$  enthält.
- 6) Alle Eigenwerte von  $A$  liegen im Wertebereich von  $A$ .
- 7) Sind die Eigenwerte absteigend nach ihrem Betrag sortiert und gilt  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , dann approximiert man mit der Potenzenmethode mit Startwert  $b$  einen Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1$ .
- 8) Ist  $A$  symmetrisch, dann konvergiert die Folge der Rayleigh-Quotienten Iteration lokal kubisch gegen einen Eigenwert von  $A$ .
- 9) Sind alle Eigenwerte von  $A$  paarweise verschieden, dann konvergiert der QR-Algorithmus gegen die Schurform von  $A$ .
- 10) Sind  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  symmetrisch und kongruent, dann besitzen sie dieselbe Trägheit.

### **Hinweis zur Bewertung:**

Wenn Sie mehr als 8 Aussagen bearbeiten, werden die 8 Aussagen mit den niedrigsten Nummern gewertet.

Sie erhalten für jede richtige Antwort 1 Punkt, für jede falsche  $-1$  Punkt und 0 Punkte, wenn Sie keine Antwort geben. Die minimale Gesamtpunktzahl beträgt 0 Punkte.

## A1 Lösungsvorschlag:

a) Es gilt:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - x^2(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Für die Iterierten des Newton-Verfahrens gilt also:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(x_n^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(x_n^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = x_n - x_n(x_n^2 + 1) = -x_n^3$$

Diese Folge divergiert für Startwerte  $|x_0| > 1$ . Für  $|x_0| = 1$  gilt  $x_n = (-1)^n x_0$ .b) Man erhält  $\sqrt{3}$  als positive Lösung der Gleichung  $x^2 - 3 = 0$ . Wendet man das Newton-Verfahren auf die Funktion  $g(x) = x^2 - 3$ , so gilt wegen  $g'(x) = 2x$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2x_n^2}\right)x_n$$

A1

Aus der Iterationsvorschrift lässt sich leicht ablesen, dass  $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{Q}$  ist, falls  $x_0 \in \mathbb{Q}$  ist.**Untere Schranke:** Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion nach  $n$ , dass

$$x_n \geq \sqrt{3}$$

für alle Startwerte  $x_0$  mit  $x_0 \geq \sqrt{3}$  gilt.Für  $n = 0$  gilt die Behauptung nach Voraussetzung.Es gelte nun  $x_n \geq \sqrt{3}$  für ein  $n \geq 0$ . Mit der Darstellung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 3)$$

sieht man, dass

$$x_{n+1} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x_n^2 - 2\sqrt{3}x_n + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x_n - \sqrt{3})^2 \geq 0$$

was immer erfüllt ist.

**Monotonie:** Da

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2x_n^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x_n^2} \leq 1 \Leftrightarrow x_n^2 \geq 3$$

ist, folgt die Monotonie der Folge aus der bewiesenen Schranke  $\sqrt{3} \leq x_n$ .

Insgesamt konvergiert das Newton-Verfahren daher gegen die einzige Nullstelle von  $g$  in  $[0, \infty)$ , also  $\sqrt{3}$ .

## A2 Lösungsvorschlag:

Für eine effiziente Berechnung ist es wichtig, dass die  $LU$ -Zerlegung der geschifteten Matrix nur einmal zu Beginn des Algorithmus berechnet wird. Aus der Vorlesung ist der Aufwand für die einzelnen Schritte bekannt:

$[L, U] = \text{lu}(\mu I - A)$	▷ $O(n^3)$ Operationen
<b>for</b> $k = 1 : N$ <b>do</b>	
$\tilde{z}_k = \text{solve}(L, y_{k-1})$	▷ $O(n^2)$ Op., da $L$ Dreiecksmatrix
$z_k = \text{solve}(U, \tilde{z}_k)$	▷ $O(n^2)$ Op., da $U$ Dreiecksmatrix
$y_k = z_k / \ z_k\ $	▷ $O(n)$ Operationen
$\rho_k = y_k^H A y_k$	▷ $O(n^2)$ Operationen
<b>end for</b>	

Der Gesamtaufwand ist also in  $O(n^3 + Nn^2)$ .

A3 Lösungsvorschlag:

- a)  $\psi$  ist eine quadratische Funktion in  $\alpha$  mit Höchstkoeffizient  $p^T A p$ . Da  $A$  positiv definit ist, gilt  $p^T A p > 0$ . Also ist  $\psi$  eine nach oben offene Parabel mit genau einem stationären Punkt, dem gesuchten Minimum.

Da  $A$  symmetrisch ist, gilt für den Gradient von  $\phi$

$$\nabla\phi(x) = (Ax - b)^T.$$

Damit ist die Ableitung von  $\psi$  gegeben durch

$$\psi'(\alpha) = \nabla\phi(x + \alpha p)p = \left(A(x + \alpha p) - b\right)^T p.$$

Somit lässt sich die Minimalstelle aus

$$0 \stackrel{!}{=} \psi'(\alpha) = (Ax - b)^T p + \alpha p^T A p = -r^T p + \alpha p^T A p$$

bestimmen. Wegen  $p^T A p > 0$  gilt also

$$\alpha = \frac{r^T p}{p^T A p}.$$

b) Sei  $x \in \mathcal{K}_m(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\}$ . Es existieren  $c_j \in \mathbb{R}$  mit

$$x = \sum_{j=0}^{m-1} c_j A^j b.$$

Da  $Ax = b$  ist, folgt daraus

$$b = Ax = \sum_{j=0}^{m-1} c_j A^{j+1} b \Leftrightarrow c_{m-1} A^m b = b - \sum_{j=0}^{m-2} c_j A^{j+1} b.$$

Falls  $c_{m-1} \neq 0$  ist, folgt sofort  $A^m b \in \text{span}\{b, \dots, A^{m-1}b\}$  und somit

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m+1}.$$

Falls  $c_{m-1} = 0$  ist, so existiert wegen  $x \neq 0$  ein  $k \in \{0, \dots, m-2\}$  mit

$$c_{m-1} = \dots = c_{k+1} = 0 \quad \text{und} \quad c_k \neq 0.$$

Also war schon  $x \in \mathcal{K}_k$ , woraus mit dem ersten Fall  $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_{k+1}$  folgt. Rekursiv gilt dann auch

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m+1}$$

für alle  $m \geq k$ .

## A4 Lösungsvorschlag:

a) Wir definieren für  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{C}$

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Nach dem Satz von Gershgorin angewandt auf  $A$  gilt

$$\lambda(A) \subset B_2(3) \cup B_1(0) \cup B_1(6)$$

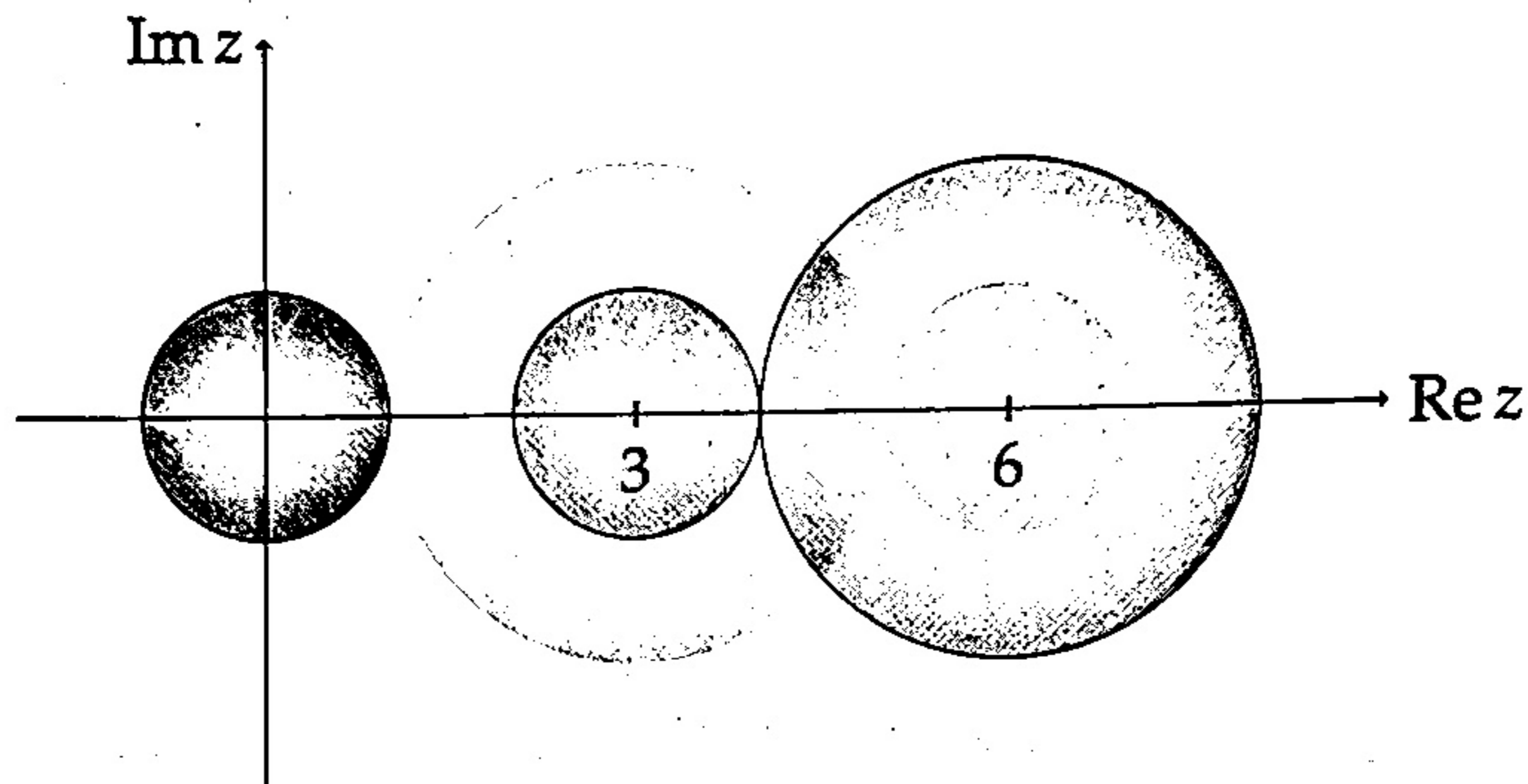
und für  $A^T$  erhalten wir

$$\lambda(A^T) = \lambda(A) \subset B_1(3) \cup B_1(0) \cup B_2(6).$$

Insgesamt wissen wir also, dass

$$\begin{aligned}\lambda(A) &\subset \left( B_2(3) \cup B_1(0) \cup B_1(6) \right) \cap \left( B_1(3) \cup B_1(0) \cup B_2(6) \right) \\ &= B_1(0) \cup B_1(3) \cup \left( B_2(3) \cap B_2(6) \right) \cup B_1(6).\end{aligned}$$

Im folgenden Bild sind die Gershgorin-Kreise für  $A$  bzw.  $A^T$  in gelb bzw. grau dargestellt. Die gesuchte Obermenge von  $\lambda(A)$  ist der Teil in dunklem Gelb.



- b) Nach dem Hinweis liegt nur der größte Eigenwert  $\lambda_3$  in  $I_0 = (\alpha, \beta] = (10, 12]$ . Also ist

$$\begin{aligned}\pi_\alpha &= \pi(T - 10I) = 1, \\ \pi_\beta &= \pi(T - 12I) = 0.\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt von  $I_0$  ist  $\gamma = (\alpha + \beta)/2 = 11$ . Wir bestimmen  $\pi_\gamma$  mit Hilfe des Trägheitssatzes von Sylvester und dem Hinweis:

Für die Diagonalelemente  $d_1, d_2, d_3$  der Zerlegung  $LDL^T = T - 11I$  gilt

$$d_1 = -11 < 0, \quad d_2 = -1 + \frac{1}{11} = -\frac{10}{11} < 0, \quad d_3 = -6 + \frac{10}{11} < 0.$$

Damit ist  $\pi_\gamma = \pi(T - 11I) = 0$ .

- Wegen  $\pi_\gamma = \pi_\beta = 0$  liegt kein Eigenwert von  $T$  in  $(11, 12]$ .
- Wegen  $\pi_\gamma = 0 < 1 = \pi_\alpha$  liegt ein Eigenwert von  $T$  in  $(10, 11]$ .

Also ist  $I = (10, 11]$  das gesuchte Intervall.

## A5 Lösungsvorschlag:

- 1) (wahr) Komplexe Schur-Normalform (Satz 6.4)
- 2) (falsch) z.B. schiefsymmetrische Matrizen
- 3) (wahr) Satz 6.8
- 4) (falsch) z.B.  $A = I$  oder  $A = 0$
- 5) (wahr) Satz von Gershgorin
- 6) (wahr) Lemma 6.21
- 7) (falsch) Der Anteil von  $b$  in Richtung des gesuchten Eigenvektors muss für die Konvergenz von Null verschieden sein.
- 8) (wahr) Satz 6.27
- 9) (falsch) Die Eigenwerte müssten auch noch betragsmäßig paarweise verschieden sein und die Voraussetzung an die Eigenvektormatrix aus Satz 6.29 muss erfüllt sein.
- 10) (wahr) Sylvesters Trägheitssatz (Satz 6.41)