

Wieners
Numerik 2

Dauer: 90 min. Lösung: keine Bestanden mit:

Aufgabe 1 (Kurzaufgaben)

2+1+3+2+2=10 Punkte

Bearbeiten Sie die folgenden Kurzaufgaben.

- Sei P_N ein Interpolationspolynom zu den Stützstellen $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N$ und den Werten $f_0, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition der zugehörigen Lagrange-Polynome und das Interpolationspolynom in der Lagrange-Basis an.
- Geben Sie an, wie die Stützstellen bei der Gauß-Quadratur gewählt werden. Gehen Sie davon aus, dass Q_N das zugehörige Orthogonalpolynom ist.
- Gegeben sei eine Quadraturformel mit den N Stützstellen $\xi_1, \dots, \xi_N \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass der Polynomgrad, bis zu der die Quadraturformel exakt ist, maximal $2N - 1$ ist.
- Adaptive Quadraturverfahren verwenden eine Fehler-Heuristik zur Abschätzung des Fehlers auf einem Intervall. Was passiert, wenn der geschätzte Fehler eine vordefinierte Schranke unterschreitet? Was passiert, wenn er diese überschreitet?
- Geben Sie den Approximationssatz von Weierstraß an.

Aufgabe 2 (Orthogonalpolynome)

5+3+2=10 Punkte

Die Chebychev-Polynome 2. Art sind gegeben durch

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \quad -1 < t < 1.$$

- Zeigen Sie, dass die Chebychev-Polynome 2. Art orthogonal bezüglich dem gewichteten L^2 -Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_W$ mit $W(t) = \sqrt{1-t^2}$ sind und normalisieren Sie die Chebychev-Polynome 2. Art bezüglich $\|\cdot\|_W = \sqrt{(\cdot, \cdot)_W}$.

Hinweis: Substituieren Sie geeignet und nutzen Sie

$$\sin(\eta) \sin(\theta) = \frac{1}{2} (\cos(\eta - \theta) - \cos(\eta + \theta)).$$

- Zeigen Sie, dass für die Chebychev-Polynome 2. Art die folgende Drei-Term-Rekursionsformel

$$U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t, \quad U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t)$$

gilt und begründen Sie, dass $U_n \in \mathbb{P}_n$.

Hinweis: Verwenden Sie

$$\sin(k\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} (\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Gegeben sei nun $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Geben Sie die Best-Approximation von f in \mathbb{P}_3 bezüglich $\|\cdot\|_W = \sqrt{(\cdot, \cdot)_W}$ an.

Aufgabe 3 (Interpolation)

2+2+5=9 Punkte

Gegeben seien eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = b$ und eine Funktion $f \in C[a, b]$. Sei $S \in \mathcal{S}_3$ der zugehörige interpolierende Spline.

- Formulieren Sie die natürlichen Randbedingungen und, für den Fall $f(\xi_0) = f(\xi_N)$, die periodischen Randbedingungen.
- Erklären Sie kurz das Runge-Phänomen. Tritt dies bei der Spline-Interpolation auf?
- Gegeben seien nun auf dem Intervall $[0, 2]$ die Stützstellen $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$ und $\xi_2 = 2$ und

$$S(t) = \begin{cases} \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t - \frac{1}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ \delta(t-1)^4 + \frac{1}{2}t^4, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie α, β, γ und δ , so dass $S \in \mathcal{S}_3$ gilt und S die Hermite-Randbedingungen

$$S'(\xi_0) = 2, \quad S'(\xi_2) = 14$$

erfüllt.

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie alle Bedingungen überprüfen und nicht nur die Koeffizienten bestimmen!

Aufgabe 4 (Quadratur)

2+4+1+2=9 Punkte

Sei $f \in C^1[a, b]$ sowie $\xi_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$ mit $h = (b - a)/N$. Die zusammengesetzte rechtsseitige Rechtecksregel ist definiert durch

$$I(f) = \sum_{n=1}^N hf(\xi_n).$$

Für die zusammengesetzte rechtsseitige Rechtecksregel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I(f) \right| \leq \frac{b-a}{2} h \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

- Geben Sie die Taylorentwicklung von f auf $[\xi_{n-1}, \xi_n]$ mit Lagrange-Restglied an. Entwickeln Sie dabei um die rechte Intervallgrenze.
- Zeigen Sie die obige Fehlerabschätzung.
- Es soll nun mit der Quadraturformel I das Integral

$$\int_{-1}^3 \cos t \, dt$$

mit einer Genauigkeit von 10^{-3} berechnet werden. Bestimmen Sie die nötige Anzahl an Stützstellen.

- Beschreiben Sie, wie Sie mit derselben Anzahl an Stützstellen und einer einzigen zusätzlichen Funktionsauswertung die Fehlerschranke für das Beispiel aus Teilaufgabe c) verkleinern können. Begründen Sie kurz, warum die Fehlerschranke tatsächlich kleiner wird.

Aufgabe 5 (Fouriertransformation)

4+4=8 Punkte

Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\omega_N = \exp(i\frac{2\pi}{N})$ eine N -te Einheitswurzel. Die Fouriermatrix ist definiert durch $F_N = (\omega_N^{jk})_{j,k=0,\dots,N-1} \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\frac{1}{N}}F_N$ unitär ist, das heißt

$$F_N \overline{F_N} = NI_N,$$

wobei I_N die Identitätsmatrix ist.

b) Sei nun $C \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mit

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & c_{N-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

eine zirkuläre Matrix und $b \in \mathbb{C}^N$ ein komplexer Vektor. Erläutern Sie, wie das Gleichungssystem $Cx = b$ mit der Fouriertransformation effizient gelöst werden kann und geben Sie den Aufwand an.