

**Aufgabe 1:** (weiß)

Gegeben seien die Funktion  $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$ , sowie die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \tan(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

- Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren angewandt auf  $f$  der Iterationsvorschrift entspricht.
- Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass die Iterationsvorschrift für  $x_0 \in [-a, a]$  mit  $0 < a < \frac{\pi}{4}$  gegen 0 konvergiert.
- Zeigen Sie, dass die Iterationsvorschrift mindestens lokal kubisch gegen 0 konvergiert.
- Zeigen Sie, dass für  $x_0 \neq 0$  mit  $\tan(x_0) = 2x_0$  in der Iterationsvorschrift keine Konvergenz eintritt.

Hinweis:  $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Aufgabe 2:** (gelb)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  eine komplex symmetrische Matrix, d.h.  $A = A^T$ . Für  $v_0 = 0$  und  $v_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  sei

$$v_{m+1} = Av_m - \alpha_m v_m - \beta_m v_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, L,$$

mit  $\beta_1 = 0$  sowie

$$\alpha_m = \frac{v_m^T Av_m}{\delta_m}, \quad \beta_m = \frac{v_{m-1}^T Av_m}{\delta_{m-1}}, \quad \delta_m = v_m^T v_m,$$

gegeben. Ferner sei  $L \geq 0$  so definiert, dass  $\delta_j \neq 0$  für  $j = 1, \dots, L$  und  $\delta_{L+1} = 0$ .

- Zeigen Sie  $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathcal{K}_m(A, v_1)$  für  $m = 1, \dots, L$ .
- Zeigen Sie  $v_j^T v_m = 0$  für  $1 \leq j < m \leq L$ .

Hinweis: Induktion über  $m$ .

- Falls  $v_{L+1} \neq 0$  ist, spricht man von einem ernsthaften Zusammenbruch. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{K}_L(A, v_1)$  ein  $A$ -invarianter Unterraum ist, falls kein ernsthafter Zusammenbruch auftritt.
- Geben Sie für  $n = 2$  und  $L = 0$  ein Beispiel für einen ernsthaften Zusammenbruch an.

**Aufgabe 3:** (rosa)

a) Es sei  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  eine komplexe Matrix mit Wertebereich  $\mathcal{F}(A)$ .

$\alpha$ ) Zeigen Sie  $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha \mathcal{F}(A)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$\beta$ ) Für  $k = 1, \dots, K$  sei  $\theta_k \in [0, 2\pi)$  und  $A_k = e^{i\theta_k} A$ . Weiter seien die Rechtecke  $R_k$  definiert durch

$$R_k = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(A_k + A_k^H)\right) \times i\mathcal{F}\left(\frac{1}{2i}(A_k - A_k^H)\right) \subseteq \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass sich der Wertebereich von  $A$  einschließen lässt durch

$$\mathcal{F}(A) \subseteq \bigcap_{k=1}^K e^{-i\theta_k} R_k.$$

$\gamma$ ) Geben Sie für die Matrix

$$A = (1 - i) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

die Mengen  $R_k$ ,  $k = 1, 2$ , mit  $\theta_1 = 0$  und  $\theta_2 = \pi/4$  an.

Skizzieren Sie außerdem die Mengen  $e^{-i\theta_k} R_k$ ,  $k = 1, 2$ , sowie die schärfere Einschließung für  $\mathcal{F}(A)$  aus Teil  $\beta$ ).

Hinweis:  $e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

b) Zeigen Sie schematisch, wie man durch Multiplikation mit maximal drei Householder-Matrizen von links oder rechts in der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \oplus & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

das Element  $\oplus$  eliminiert, ohne zusätzliche Nichtnullelemente zu erzeugen. Verwenden Sie hierzu das zusätzliche rosa Aufgabenblatt.

#### Aufgabe 4: (grün)

- a) Seien  $M \in \mathbb{N}$ ,  $N = 2M + 1$  sowie Daten  $(\zeta_j, y_j)$  mit  $\zeta_j = \frac{2\pi j}{N}$  und  $y_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$ , gegeben. Weiter sei

$$t_N: \zeta \mapsto \sum_{k=-M}^M \hat{y}_k e^{ik\zeta}$$

ein trigonometrisches Polynom, wobei  $\hat{y}_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , die diskreten Fourierkoeffizienten von  $(y_j)_{j=0}^{N-1}$  sind.

- $\alpha)$  Zeigen Sie, dass  $t_N$  die Interpolationseigenschaft  $t_N(\zeta_j) = y_j$  für alle  $j = 0, \dots, N - 1$  hat.

- $\beta)$  Zeigen Sie, dass für reelle Daten  $y_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$ ,

$$t_N(\zeta) = \hat{y}_0 + 2 \sum_{k=1}^M (\operatorname{Re}(\hat{y}_k) \cos(k\zeta) - \operatorname{Im}(\hat{y}_k) \sin(k\zeta))$$

sowie  $t_N(\zeta) \in \mathbb{R}$  für  $\zeta \in \mathbb{R}$  gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis  $\hat{y}_{-k} = \overline{\hat{y}_k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , verwenden.

- b) Es sei  $L \in \mathbb{N}$  und  $N = 2^L$ . Schreiben Sie in Python oder in Pseudocode eine Funktion  $z = \text{tiefpass}(y, N, K)$ , welche die Anwendung eines Tiefpassfilters auf einen Vektor  $y \in \mathbb{C}^N$  so *effizient wie möglich* berechnet und das Ergebnis zurückgibt. Der Tiefpassfilter soll alle Frequenzen größer  $K \in \mathbb{N}$  herausfiltern, d.h., die Fourierkoeffizienten des Filters sind gegeben durch

$$\hat{\phi}_n = \begin{cases} 1, & |n| \leq K, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Implementierung dürfen Sie Funktionen  $\hat{y} = \text{fft}(y)$  und  $y = \text{ifft}(\hat{y})$  verwenden, welche die schnelle (inverse) Fouriertransformation eines Vektors berechnen.

Geben Sie zusätzlich den asymptotischen Gesamtaufwand (Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen) der Funktion `tiefpass` in  $\mathcal{O}$ -Notation bezüglich  $N$  an.

Lösung von Aufgabe 1:

a) Da  $f'(x) = \cos(x)$ , ist die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens gegeben durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = x_n - \tan(x_n).$$

b) Wir definieren die Funktion  $F(x) = x - \tan(x)$ . Da  $F(0) = 0$  ist, ist 0 ein Fixpunkt. Wir zeigen, dass  $F$  auf  $[-a, a]$  eine kontraktive Selbstabbildung ist. Es gilt

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2(x)}$$

und für  $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  ist  $\cos^2(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$ . Somit ist

$$-1 < F'(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

und daher  $|F'(x)| < 1$  für alle  $x \in [-a, a]$ . Damit ist  $F$  kontraktiv und außerdem eine Selbstabbildung, denn für  $|x| \leq a$  folgt

$$|F(x)| = |F(x) - F(0)| < |x - 0| = |x| \leq a.$$

Somit konvergiert die Rekursion nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gegen 0.

c) Der Fehler im  $n$ -ten Rekursionsschritt ist gegeben durch  $e_n = x_n - 0 = x_n$ . Für die kubische Konvergenz ist zu zeigen: Es existiert eine Konstante  $C > 0$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ , sodass

$$|e_{n+1}| \leq C |e_n|^3 \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Für den Tangens gilt

$$\tan(0) = 0, \quad \tan'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1, \quad \tan''(0) = 0 \quad (\text{da } \tan \text{ ungerade}).$$

Taylor-Entwicklung des Tangens um 0 liefert somit für alle  $x$  in einer Umgebung  $U$  von 0

$$\tan(x) = x + \tan^{(3)}(\eta)x^3 \quad \text{für ein } \eta \in (0, x),$$

sodass

$$|x - \tan(x)| \leq Cx^3 \quad \text{mit } C = \max_{\eta \in U} |\tan^3(\eta)|.$$

Damit erhält man für alle  $n \in \mathbb{N}$  lokal in einer Umgebung um 0

$$|e_{n+1}| = |x_{n+1}| = |x_n - \tan(x_n)| \leq C |x_n^3| = C |e_n|^3.$$

d) Für den ersten Iterationschritt gilt

$$x_1 = x_0 - \tan(x_0) = -x_0.$$

Da der Tangens ungerade ist, gilt für den zweiten Iterationschritt

$$x_2 = x_1 - \tan(x_1) = -x_0 + \tan(x_0) = x_0.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$x_n = (-1)^n x_0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

die Iterationsvorschrift konvergiert also nicht.

Lösung von Aufgabe 2:

a) Nach Definition des Krylovraums gilt  $\text{span}\{v_1\} = \mathcal{K}_1(A, v_1)$ .

Angenommen, es gelte also bereits  $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathcal{K}_m(A, v_1)$  für  $m = 1, \dots, L-1$ .

Falls  $Av_m \in \mathcal{K}_{m+1}(A, v_1) \setminus \mathcal{K}_m(A, v_1)$ , so ist

$$v_{m+1} = Av_m - \alpha_m v_m - \beta_m v_{m-1} \in \mathcal{K}_{m+1}(A, v_1) \setminus \mathcal{K}_m(A, v_1),$$

da  $v_{m-1}, v_m \in \mathcal{K}_m(A, v_1)$ .

Ist  $Av_m \in \mathcal{K}_m(A, v_1)$ , so ist  $\mathcal{K}_m(A, v_1)$   $A$ -invariant und damit

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_{m+1}\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathcal{K}_m(A, v_1) = \mathcal{K}_{m+1}(A, v_1).$$

b) Falls  $L \in \{0, 1\}$  ist, ist nichts zu zeigen. Sei also  $L > 1$ . Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über  $m$ .

Induktionsanfang: Für  $m = 1$  ist die Aussage wahr.

Induktionsannahme: Es gelte  $v_j^T v_m = 0$  für  $1 \leq j < m \leq L-1$ .

Induktionsschritt:  $m \rightsquigarrow m+1$  (es gilt also  $m+1 \leq L$ ). "Multiplizieren" wir die Rekursion von links mit  $v_j^T$ ,  $j = 1, \dots, m$ , erhalten wir

$$v_j^T v_{m+1} = v_j^T Av_m - \alpha_m v_j^T v_m - \beta_m v_j^T v_{m-1}. \quad (1)$$

Für  $j = 1, \dots, m-2$  gilt dann wegen  $A = A^T$  und der Induktionsvoraussetzung

$$v_j^T v_{m+1} = (Av_j)^T v_m - \alpha_m v_j^T v_m - \beta_m v_j^T v_{m-1} = (Av_j)^T v_m.$$

Da nach Aufgabenteil a)  $v_j \in \mathcal{K}_j(A, v_1)$ , gilt  $Av_j \in \mathcal{K}_{j+1}(A, v_1) \subseteq \mathcal{K}_{m-1}(A, v_1)$ . Damit folgt erneut aus der Induktionsvoraussetzung, dass  $(Av_j)^T v_m = 0$ . Also gilt  $v_j^T v_{m+1} = 0$  für  $j = 1, \dots, m-2$ .

Für  $j = m$  in (1) gilt wegen der Induktionsvoraussetzung und den Definitionen von  $\delta_m$  und  $\alpha_m$

$$v_m^T v_{m+1} = v_m^T Av_m - \alpha_m v_m^T v_m - \beta_m v_m^T v_{m-1} = v_m^T Av_m - \alpha_m \delta_m = 0.$$

Für  $j = m-1$  in (1) gilt erneut wegen der Induktionsvoraussetzung und der Definition von  $\beta_m$

$$v_{m-1}^T v_{m+1} = v_{m-1}^T Av_m - \alpha_m v_{m-1}^T v_m - \beta_m v_{m-1}^T v_{m-1} = v_{m-1}^T Av_m - \beta_m \delta_{m-1} = 0.$$

c) Falls  $L = 0$  ist, gilt  $\delta_1 = 0$ . Da  $v_1 \neq 0$ , tritt somit ein ernsthafter Zusammenbruch auf.

Sei also  $L \geq 1$  mit  $\delta_{L+1} = 0$ . Tritt kein ernsthafter Zusammenbruch auf, so ist  $v_{L+1} = 0$  und es gilt

$$0 = v_{L+1} = Av_L - \alpha_L v_L - \beta_L v_{L-1} \iff Av_L = \alpha_L v_L + \beta_L v_{L-1}.$$

Da  $v_L, v_{L-1} \in \mathcal{K}_L(A, v_1)$ , ist auch (als Linearkombination)  $Av_L \in \mathcal{K}_L(A, v_1)$ . Also ist  $\mathcal{K}_L(A, v_1)$  ein  $A$ -invarianter Unterraum.

d) Für den Vektor  $v_1 = [1 \ i]^T$  gilt  $\delta_1 = v_1^T v_1 = 1 - 1 = 0$ ,

es tritt also ein ernsthafter Zusammenbruch (für  $L = 0$ ) auf.

**Lösung von Aufgabe 3:**

a)  $\alpha$ ) Es gilt für  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(\alpha A) = \left\{ \frac{x^H(\alpha A)x}{x^H x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} = \alpha \left\{ \frac{x^H A x}{x^H x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} = \alpha \mathcal{F}(A).$$

$\beta$ ) Nach dem Satz von Bendixson-Hirsch gilt

$$\mathcal{F}(A_k) \subseteq R_k.$$

Mit  $\alpha$ ) folgt für  $k = 1, \dots, K$   $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(e^{-i\theta_k} A_k) = e^{-i\theta_k} \mathcal{F}(A_k) \subseteq e^{-i\theta_k} R_k$

und damit auch  $\mathcal{F}(A) \subseteq \bigcap_{k=1}^K e^{-i\theta_k} R_k.$

$\gamma$ ) Es gilt  $A_1 = A$  und

$$\frac{1}{2}(A + A^H) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2i}(A - A^H) = - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sind gegeben durch  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$ . Somit ist

$$R_1 = [0, 5] \times i[-5, 0].$$

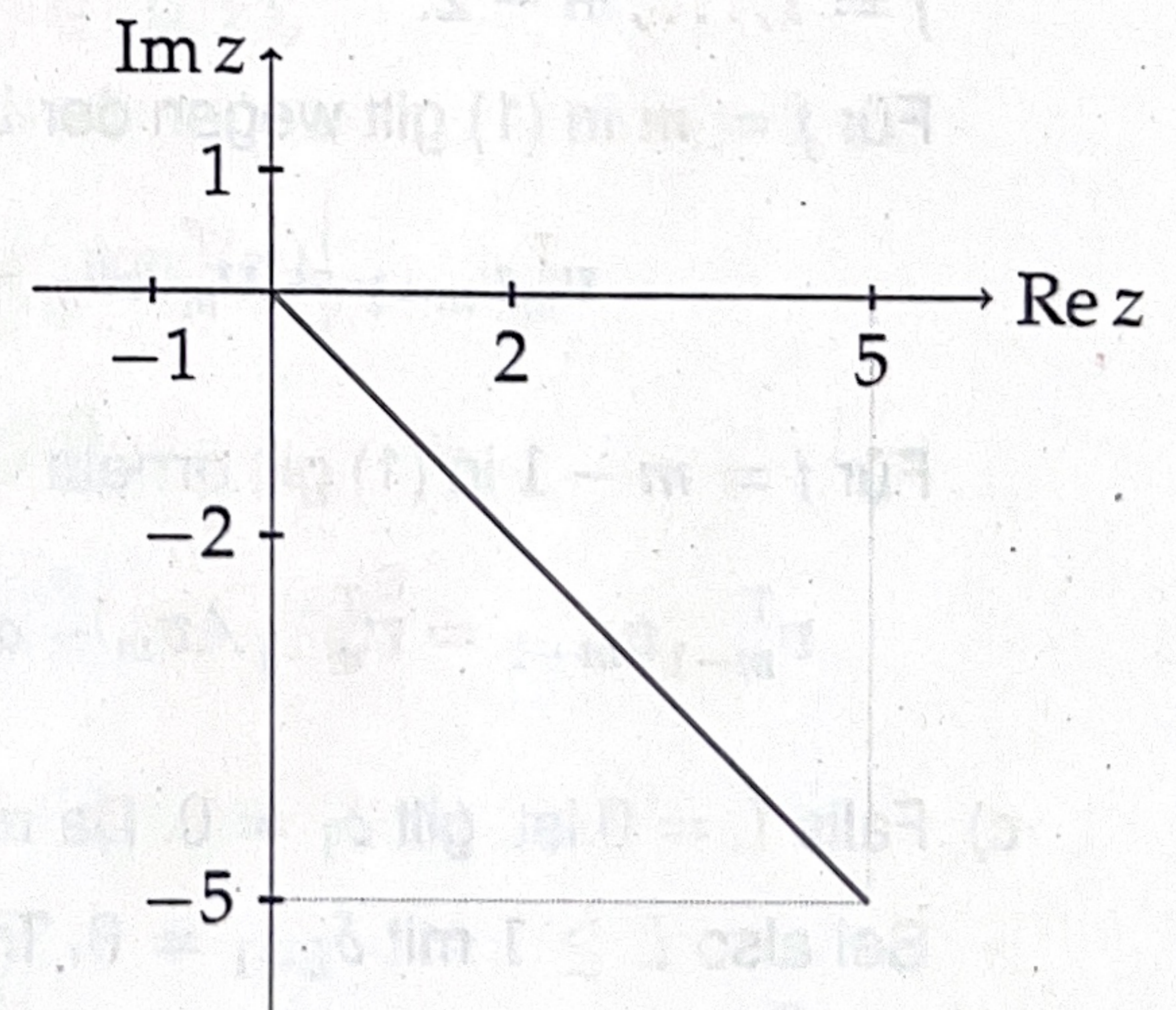
Weiter ist

$$A_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} A = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

und  $R_2 = \mathcal{F}(A_2) = [0, 5\sqrt{2}]$ . Somit ergibt sich aus  $\beta$ ) die Einschließung von  $\mathcal{F}(A)$  zu

$$\mathcal{F}(A) \subseteq R_1 \cap e^{-i\frac{\pi}{4}} R_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} R_2 = \{x - ix \mid x \in [0, 5]\}.$$

Skizzen der Mengen  $R_1$  und  $e^{-i\theta_2} R_2 = R_1 \cap e^{-i\theta_2} R_2$ :



b). Multiplikation von  $A$  mit Householder-Matrix

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \times & \times & & & \\ & \times & \times & & & \\ & & & I_3 & & \end{bmatrix} \text{ liefert } A_1 = Q_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \oplus & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Multiplikation von  $A_1$  mit Householder-Matrix

$$Q_2 = \begin{bmatrix} I_3 & & \\ & \times & \times \\ & \times & \times \\ & & & 1 \end{bmatrix} \text{ liefert } A_2 = A_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & \times & \times \end{bmatrix}$$

Multiplikation von  $A_2$  mit Householder-Matrix

$$Q_3 = \begin{bmatrix} I_4 & & \\ & \times & \times \\ & \times & \times \end{bmatrix} \text{ liefert } A_3 = Q_3 A_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 4:

- a)  $\alpha)$  Es sei  $j$  beliebig, aber fest. Wegen der Periodizität von  $\hat{y}_k$  und  $\omega_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$  folgt mit der Definition der diskreten (inversen) Fouriertransformation

$$t_N(\zeta_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k e^{ik\zeta_j} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k \omega_N^{-kj} = (F_N^{-1} \hat{y})_j = (F_N^{-1} F_N y)_j = y_j.$$

- $\beta)$  Da  $y_j \in \mathbb{R}$  für alle  $j = 0, \dots, N-1$ , gilt nach dem Hinweis  $\hat{y}_{-k} = \overline{\hat{y}_k}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Zusammen mit  $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$  folgt daraus für  $k = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \hat{y}_k e^{ik\zeta} + \hat{y}_{-k} e^{-ik\zeta} &= \hat{y}_k e^{ik\zeta} + \overline{\hat{y}_k e^{ik\zeta}} \\ &= 2 \operatorname{Re}(\hat{y}_k e^{ik\zeta}) \\ &= 2 \operatorname{Re}((\operatorname{Re}(\hat{y}_k) + i \operatorname{Im}(\hat{y}_k)) (\cos(k\zeta) + i \sin(k\zeta))) \\ &= 2 \operatorname{Re}(\hat{y}_k) \cos(k\zeta) - 2 \operatorname{Im}(\hat{y}_k) \sin(k\zeta) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Somit ist für  $\zeta \in \mathbb{R}$ 

$$\begin{aligned} t_N(\zeta) &= \sum_{k=-M}^M \hat{y}_k e^{ik\zeta} = \hat{y}_0 + \sum_{k=1}^M (\hat{y}_k e^{ik\zeta} + \hat{y}_{-k} e^{-ik\zeta}) \\ &= \hat{y}_0 + 2 \sum_{k=1}^M (\operatorname{Re}(\hat{y}_k) \cos(k\zeta) - \operatorname{Im}(\hat{y}_k) \sin(k\zeta)). \end{aligned}$$

Da außerdem

$$\hat{y}_0 = \hat{y}_{-0} = \overline{\hat{y}_0} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \in \mathbb{R},$$

ist  $t_N(\zeta) \in \mathbb{R}$  für alle  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

## b) Variante 1 (Pseudocode):

Die Indizierung der Vektoren beginnt bei 0, für  $y \in \mathbb{C}^n$  bezeichnet  $y_{i:j}$  den Teilvektor

$$y_{i:j} = [y_i \ \dots \ y_j]^T.$$

---

```

function TIEFPASS( $y, N, K$ )
  if  $K < N/2$  then
    Berechne  $\hat{y} = \text{FFT}(y)$ 
     $\hat{y}_{K+1:N-K-1} = 0$ 
     $y = \text{IFFT}(\hat{y})$ 
  end if
  return  $y$ 
end function

```

---

## Variante 2 (Python):

```

# y, y_hut numpy arrays

def tiefpass(y, N, K):
    if K < N/2:
        y_hut = fft(y)
        y_hut[K+1:N-K] = 0
        y = ifft(y_hut)
    return y

```

---

Im Fall  $K < \frac{N}{2}$  liegt der dominante Hauptaufwand in der Berechnung der FFT bzw. IFFT und beträgt  $\mathcal{O}(N \log(N))$ , anderenfalls wird keine Filterung durchgeführt und der Aufwand beträgt  $\mathcal{O}(1)$ .