

**Aufgabe 1:** (weiß)

Sei  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $\|A\| < 1$  gegeben, wobei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Vektornorm und die davon induzierte Matrixnorm bezeichne.

Betrachten Sie zu der Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(x) = Ax + b$  die Fixpunktiteration  $x_{k+1} = f(x_k)$  mit Startvektor  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration für jeden Startvektor  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  konvergiert. Begründen Sie damit, dass die Matrix  $I_n - A$  invertierbar ist.
- Geben Sie die Iterierten  $x_k$  in Abhängigkeit von  $A$ ,  $b$  und  $x_0$  an und zeigen Sie unter Verwendung von Teil a)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k A^m b = (I_n - A)^{-1} b.$$

- Formulieren Sie das Fixpunktproblem in ein äquivalentes Nullstellenproblem um und zeigen Sie, dass das darauf angewandte Newton-Verfahren für jeden Startvektor  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  nach einem Schritt die exakte Lösung liefert.

**Aufgabe 2:** (gelb)

- Schreiben Sie eine Funktion `einschluss(A,n)` (z.B. in Python, Matlab oder Pseudocode), welche für eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  mithilfe des Satzes von Gershgorin zwei Zahlen  $\mu_{\min}$  und  $\mu_{\max}$  zurückgibt, sodass  $\lambda(A) \subseteq [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$  gilt.

Verwenden Sie dazu nur elementare Rechenoperationen.

- Wenn in einer unteren Bidiagonalmatrix die letzte Spalte Null ist, kann die letzte Zeile mit einer Folge von Householdertransformationen von links eliminiert werden und zwar so, dass sich am Ende wieder eine Bidiagonalmatrix ergibt.

Beschreiben Sie das Vorgehen schematisch mit einer  $5 \times 5$ -Matrix und verwenden Sie hierzu das zusätzliche gelbe Aufgabenblatt.

### Aufgabe 3: (rosa)

Es sei eine Hermitesche und positiv definite Matrix  $L \in \mathbb{C}^{n,n}$  sowie ein Faktor  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$  gegeben. Wir betrachten die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = I_n + \alpha L, \quad b \in \mathbb{C}^n,$$

mit Hilfe eines Krylov-Verfahrens mit Startvektor  $x_0 = 0$ .  $V_m$  sei die Orthonormalbasis aus dem Arnoldi-Verfahren angewandt auf  $L$  und  $b$ , d. h.

$$LV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T.$$

Zeigen Sie:

- Es ist  $A = A^H$  genau dann, wenn  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Es gilt  $\mathcal{K}_m(A, b) = \mathcal{K}_m(L, b)$  für  $m = 1, 2, \dots$ .
- Die Krylov-Relation

$$AV_m = V_m T_m + t_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T$$

gilt mit einer Tridiagonalmatrix  $T_m$ . Geben Sie  $T_m$  in Abhängigkeit von  $H_m$  an.

- Die Galerkin-Iterierte  $x_m$  an die Lösung von  $Ax = b$  existiert für jedes  $m = 1, 2, \dots$ .

### Aufgabe 4: (grün)

Gegeben sei die Funktion  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(\xi) = -\cos(20\xi) + \sin(21\xi),$$

sowie für ein festes  $N \in \mathbb{N}$  die Stützstellen  $\xi_j = \frac{2\pi j}{N}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .

- Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten von  $f$  gilt

$$\hat{f}(\pm 20) = -\frac{1}{2}, \quad \hat{f}(\pm 21) = \mp \frac{i}{2}, \quad \hat{f}(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 20, \pm 21\}.$$

- Bestimmen Sie für  $N = 20$  die diskreten Fourierkoeffizienten  $\hat{f}_N(k)$  des Vektors  $(f(\xi_j))_{j=0}^{N-1}$  für  $k = -N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1$ .
- Bestimmen Sie für  $N = 20$  das *reelle* trigonometrische Interpolationspolynom  $t_N$  zu den Daten  $(\xi_j, f(\xi_j))$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ .
- Wie groß muss  $N$  gewählt werden, damit das trigonometrische Interpolationspolynom  $t_N$  aus Aufgabenteil c) mit der Funktion  $f$  übereinstimmt?

Lösung von Aufgabe 1:

- a) (3P) Wir verwenden den Banach'schen Fixpunktsatz. Die Abgeschlossenheit von  $\mathbb{R}^n$  und die Selbstabbildung sind klar. Weiter gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|.$$

Da nach Voraussetzung  $\|A\| < 1$ , ist  $f$  eine Kontraktion (mit Lipschitzkonstante  $L = \|A\|$ ).

Es existiert somit ein eindeutiger Fixpunkt  $x_* \in \mathbb{R}^n$  und die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  gegen den Fixpunkt.

Da ein (eindeutiger) Fixpunkt  $x_* = f(x_*)$  existiert, besitzt das lineare Gleichungssystem

$$x_* = Ax_* + b \iff (I_n - A)x_* = b$$

eine eindeutige Lösung. Da  $b$  beliebig gewählt ist, ist  $I_n - A$  invertierbar.

- b) (4P) Es gilt

$$x_k = Ax_{k-1} + b = A^2x_{k-2} + Ab + b = \dots = A^kx_0 + \sum_{m=0}^{k-1} A^m b.$$

Da  $x_* = (I_n - A)^{-1}b$ , gilt somit

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=0}^k A^m b - (I_n - A)^{-1}b \right\| &= \left\| x_{k+1} - A^{k+1}x_0 - x_* \right\| \\ &\leq \|x_{k+1} - x_*\| + \|A^{k+1}x_0\| \\ &\leq \|x_{k+1} - x_*\| + \|A\|^{k+1} \|x_0\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da  $\|A\| < 1$  und nach Teil a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x_*$ .

- c) (3P) Sei  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(x) = x - f(x) = x - Ax - b$ . Das Fixpunktproblem

$$\text{suche } x \in \mathbb{R}^n, \text{ sodass } x = f(x)$$

ist äquivalent zu dem Nullstellenproblem

$$\text{suche } x \in \mathbb{R}^n, \text{ sodass } 0 = g(x).$$

Das Newton-Verfahren angewandt auf das Nullstellenproblem ist gegeben durch

$$x_{k+1} = x_k - J_g(x_k)^{-1}g(x_k) = x_k - (I_n - A)^{-1}(x_k - Ax_k - b) = (I_n - A)^{-1}b,$$

da  $J_g(x) = I_n - A$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  (die Invertierbarkeit von  $I_n - A$  wird in Teil a) gezeigt).

Offensichtlich konvergiert das Newton-Verfahren nach einem Schritt, da unabhängig vom Startwert  $x_1 = (I_n - A)^{-1}b$  gilt (Lösung des Nullstellenproblems bzw. des Fixpunktproblems).

## Lösung von Aufgabe 2:

a) (6P)

```

function EINSCHLUSS(A, n)
  Setze  $\mu_{\min} = A_{1,1}, \mu_{\max} = A_{1,1}$ 
  for  $k = 1, \dots, n$  do
     $r = 0$ 
    for  $\ell = 1, \dots, n$  do
      if  $k \neq \ell$  then
         $r = r + |A_{k,\ell}|$ 
      end if
    end for
    if  $\mu_{\min} > A_{kk} - r$  then
       $\mu_{\min} = A_{kk} - r$ 
    end if
    if  $\mu_{\max} < A_{kk} + r$  then
       $\mu_{\max} = A_{kk} + r$ 
    end if
  end for
  return  $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ 
end function

```

b) (4P) Die Matrix  $A$  ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von  $A$  mit Householder-Matrix

$$Q_1 = \begin{bmatrix} I_3 & & \\ & \times & \times \\ & \times & \times \end{bmatrix} \text{ liefert } A_1 = Q_1 A = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \oplus & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von  $A_1$  mit Householder-Matrix

$$Q_2 = \begin{bmatrix} I_2 & & \\ & \times & \times \\ & & 1 \\ & \times & \times \end{bmatrix} \text{ liefert } A_2 = Q_2 A_1 = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \oplus & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von  $A_2$  mit Householder-Matrix

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \times & \times \\ & & I_2 \\ & \times & \times \end{bmatrix} \text{ liefert } A_3 = Q_3 A_2 = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ \oplus & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von  $A_3$  mit Householder-Matrix

$$Q_4 = \begin{bmatrix} \times & & \\ & I_3 & \\ \times & & \times \end{bmatrix} \text{ liefert } A_4 = Q_4 A_3 = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung von Aufgabe 3:

a) (1P) Es gilt

$$A^H = I_n + \bar{\alpha}L^H = I_n + \bar{\alpha}L.$$

Da  $L$  positiv definit, also  $L \neq 0$  ist, folgt  $A = A^H$  genau dann, wenn  $\alpha = \bar{\alpha}$ , also  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist.

b) (2P) Es gilt

$$A^k = (I_n + \alpha L)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^j L^j, \quad k = 0, 1, \dots$$

Also ist nach Definition des Krylov-Raums für  $m = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{K}_m(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\} \subseteq \mathcal{K}_m(L, b).$$

Analog folgt aus  $\alpha L = A - I_n$ , dass  $\mathcal{K}_m(L, b) \subseteq \mathcal{K}(A, b)$  und daraus folgt die Behauptung.

c) (3P) Wir multiplizieren die Krylov-Relation für  $L$  mit  $\alpha$  und addieren  $V_m$ . Dies liefert

$$(I_n + \alpha L)V_m = AV_m = V_m(I_m + \alpha H_m) + \alpha h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T.$$

$H_m$  ist eine obere Hessenberg-Matrix, für die  $H_m = V_m^H L V_m = H_m^H$  wegen  $L = L^H$  gilt. Daher ist  $H_m$  tridiagonal und dasselbe gilt für  $T_m = I_m + \alpha H_m$ .

d) (4P) Aus Satz 7.7 der Vorlesung wissen wir, dass die Galerkin-Iterierte genau dann existiert, wenn  $T_m$  nicht singular. Nach Lemma 7.8 gilt für die Wertebereiche  $\mathcal{F}(T_m) \subset \mathcal{F}(A)$ . Insbesondere, folgt aus  $0 \notin \mathcal{F}(A)$ , dass  $0 \notin \lambda(T_m) \subset \mathcal{F}(T_m)$ , also  $T_m$  nicht singular ist.

Nach Definition von  $L$  gilt  $\mathcal{F}(L) \subset \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$ , weil  $L$  Hermitesch und positiv definit ist. Daraus folgt

$$\mathcal{F}(A) = 1 + \alpha \mathcal{F}(L) \subset \{1 + \alpha z \mid z \in \mathbb{R}, z > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \geq 1\}.$$

Insbesondere ist  $0 \notin \mathcal{F}(A)$ . Daher existiert die Galerkin-Iterierte.

Lösung von Aufgabe 4:

a) (2P) Da  $f$  stetig differenzierbar und  $2\pi$ -periodisch ist, stimmt  $f$  mit seiner Fourierreihe überein. Wegen  $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$  und  $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$  für  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(\zeta) = -\frac{1}{2}(e^{20i\zeta} + e^{-20i\zeta}) + \frac{1}{2i}(e^{21i\zeta} - e^{-21i\zeta}) = -\frac{1}{2}e^{20i\zeta} - \frac{1}{2}e^{-20i\zeta} - \frac{i}{2}e^{21i\zeta} + \frac{i}{2}e^{-21i\zeta},$$

woraus mit der Definition der Fourierreihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ik\zeta}$  mittels Koeffizientenvergleich folgt, dass

$$\hat{f}(\pm 20) = -\frac{1}{2}, \quad \hat{f}(\pm 21) = \mp \frac{i}{2}, \quad \hat{f}(k) = 0, \quad k \neq \pm 20, \pm 21.$$

b) (4P) Die Berechnung der diskreten Fourierkoeffizienten erfolgt mithilfe des Aliasing-Theorems:

$$\hat{f}_N(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k + jN) \quad \text{für } k \in \{-N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1\}.$$

Für  $N = 20$  gilt dann mit Aufgabenteil a)

$$\hat{f}_{20}(0) = \hat{f}(20) + \hat{f}(-20) = -1 \quad \text{und} \quad \hat{f}_{20}(\pm 1) = \hat{f}(\pm 21) = \mp \frac{i}{2},$$

da  $\hat{f}(k) = 0$  für alle  $k \notin \{\pm 20, \pm 21\}$ . Mit der gleichen Argumentation folgt  $\hat{f}_{20}(k) = 0$  für  $k \notin \{-1, 0, 1\}$ .

c) (3P) Für  $N$  gerade ist ein trigonometrisches Interpolationspolynom gegeben durch

$$t_N(\xi) = \frac{1}{2} \left( \widehat{f}_N(-N/2)e^{-iN\xi/2} + \widehat{f}_N(N/2)e^{iN\xi/2} \right) + \sum_{|k| < N/2} \widehat{f}_N(k)e^{ik\xi},$$

wobei  $\widehat{f}_N(k)$  periodisch fortgesetzt wird ( $\widehat{f}_N(N/2) = \widehat{f}_N(-N/2)$ ). Für  $N = 20$  und aus Aufgabenteil b) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} t_{20}(\xi) &= \frac{1}{2} \left( \widehat{f}_{20}(-10)e^{-20i\xi/2} + \widehat{f}_{20}(10)e^{20i\xi/2} \right) + \sum_{|k| < 10} \widehat{f}_{20}(k)e^{ik\xi} \\ &= -1 - \frac{i}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) = -1 + \frac{1}{2i}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) \\ &= -1 + \sin(\xi). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt hieraus direkt  $t_{20}([0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}$ .

d) (1P) Nach der Vorlesung stimmt eine beliebige  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\widehat{f}(k) = 0$  für  $|k| > K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , mit dem trigonometrischen Interpolationspolynom überein, wenn  $N > 2K$ . Da hier  $K = 21$ , gilt also  $N > 42$ .