# Jahnke

# Numerische Mathematik 2

Dauer: 90 min. Lösung: keine

**Aufgabe 1** **6 Punkte**

Wir betrachten das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\frac{1}{2}\|f(x)\|_2^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n}!$$

für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. Wir nehmen an, dass $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ vollen Rang hat.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Das Gauß-Newton-Verfahren werde nun **zweimal** durchgeführt (für verschiedene Funktionen und Startwerte):

1.) Das erste Mal direkt für die gegebene Funktion $f$ mit dem Startwert $y_0 = Ax_0$.
Die Iterierten bezeichnen wir mit $y_k$ für $k = 0, 1, \ldots$.

2.) Das zweite Mal für die Funktion $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\widetilde{f}(x) = f(Ax)$ mit dem Startwert $x_0$.
Die Iterierten bezeichnen wir mit $x_k$ für $k = 0, 1, \ldots$.

Zeigen Sie, dass $y_k = Ax_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

**Aufgabe 2** **4 + 4 = 8 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Fouriermatrix $F_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ die Identität

$$F_N A = DF_N$$

für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ erfüllt ist und geben Sie auch $d_1, \ldots, d_n$ an.

(b) Zeigen Sie mit Teil (a) (und **ohne** auf die Übungsblätter zu verweisen), dass es einen Vektor $b \in \mathbb{C}^N$ gibt, sodass $Av = b * v$ für alle $v \in \mathbb{C}^N$ erfüllt ist, wobei $*$ die diskrete Faltung bezeichne.

## Aufgabe 3 $\quad 2 + 1 + 4 = 7$ Punkte

Gegeben sei für $\varphi > 0$ die **positive** Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \varphi & 1 & 1 \\ 1 & \varphi & 1 \\ 1 & 1 & \varphi \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Spektralradius $\rho(A)$ ohne dass Sie dabei das charakteristische Polynom von $A$ bestimmen. *Hinweis: Betrachten Sie die Zeilensummen der Matrix A.*

*Die folgenden Aufgabenteile können unabhängig von Teil (a) bearbeitet werden.*
*Sie dürfen für den Rest der Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass*

$$Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad Q_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

*gelten und $Q_1$ und $Q_2$ Householder-Transformationen sind.*

(b) Geben Sie eine Householder-Transformation $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass

$$\widetilde{A} = QAQ = \begin{pmatrix} \varphi & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1+\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varphi - 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wählen Sie den Shift $\mu = 2 + \varphi$ und führen Sie einen Schritt des QR-Algorithmus mit (Einfach-)Shift $\mu$ für die Matrix $\widetilde{A}$ aus Aufgabenteil (b) durch.

Entscheiden Sie, ob die Wahl des Shifts gut geeignet war.

## Aufgabe 4 $\quad 3 + 2 + 1 = 6$ Punkte

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

und der zugehörigen Lösung $\widehat{x}$.

(a) Zeigen Sie, dass die im Arnoldi-Prozess berechnete Orthonormalbasis von $\mathcal{K}_3(A, b)$ genau $\{e_1, e_2, e_3\}$ (also die Standardbasis des $\mathbb{C}^3$) ist.

(b) Geben Sie konkret das lineare Ausgleichsproblem an, das zur Bestimmung der zweiten GMRES-Iterierten $x_2 \approx \widehat{x}$ gelöst werden muss.

Erklären Sie auch, wie man aus der Lösung des Problems $x_2$ berechnet.

(c) Geben Sie konkret das Gleichungssystem an, das zur Bestimmung der zweiten FOM-Iterierten $x_2^* \approx \widehat{x}$ gelöst werden muss.

**Aufgabe 5** **2.5 + 3 + 1.5 + 2 = 9 Punkte**

Gegeben sei eine Block-Matrix der Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & & I_{m_1} \\ \hline & A_{22} & \\ \hline I_{m_1} & & A_{33} \end{array}\right), \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}, \quad A_{33} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1},$$

wobei $A_{11},\ A_{22},\ A_{33}$ und $A$ alle symmetrisch und positiv definit sind und $I_{m_1}$ die $(m_1 \times m_1)$-Einheitsmatrix bezeichne.
Wir möchten das lineare Gleichungssystem $Ax = b \in \mathbb{R}^{2m_1+m_2}$ mit dem cg-Verfahren lösen. Als Startvektor wählen wir stets $x_0 = 0$.

(a) Für den Vektor $b \in \mathbb{R}^{2m_1+m_2}$ gelte nun

$$b_n = 0, \qquad n = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2. \tag{1}$$

Bestimmen Sie, nach wie vielen Schritten das cg-Verfahren für das Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b$ mit der Eigenschaft (1) die richtige Lösung liefert.

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $C_{33} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ und damit die unten angegebene Matrix $C$, sodass die Matrix $\widetilde{A} = C^\top AC$ Block-diagonal ist, d.h.

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{m_1} & & -I_{m_1} \\ \hline & I_{m_2} & \\ \hline & & C_{33} \end{array}\right), \qquad \widetilde{A} = C^\top AC = \left(\begin{array}{c|c|c} \widetilde{A}_{11} & & \\ \hline & \widetilde{A}_{22} & \\ \hline & & \widetilde{A}_{33} \end{array}\right),$$

wobei die Blöcke dieselben Größen haben wie in der Matrix $A$.

(c) Bestimmen Sie, nach wie vielen Schritten das cg-Verfahren für das Gleichungssystem $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b}$ mit beliebiger rechter Seite $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^{2m_1+m_2}$ die richtige Lösung liefert.

(d) Nennen und erklären Sie **eine** wichtige Anforderung an einen guten Vorkonditionierer für das Gleichungssystem $Ax = b$, die die Matrix $B = CC^\top$ mit $C$ aus (b) erfüllt. *Hinweis: Die Eigenschaft, dass $B$ symmetrisch und positiv definit ist, ist offensichtlich und wird nicht als Lösung dieser Teilaufgabe akzeptiert.*

**Aufgabe 6** **4 + 2 = 6 Punkte**

(a) Von einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei eine Approximation $\lambda' \approx \lambda$ eines Eigenwerts $\lambda$ von $A$ bekannt.

Nennen Sie **zwei** Verfahren, mit denen möglichst effizient eine gute Approximation eines zugehörigen Eigen**vektors** berechnen werden kann. Erläutern Sie auch, wie Sie $\lambda'$ dabei verwenden.

(b) Welches Problem **eines** von Ihnen in (a) beschriebenen Verfahrens tritt auf, wenn die Größe der Matrix $n$ sehr groß ist, z.B. $n \approx 1.000.000$?

Beschreiben Sie eine möglichst allgemeine Eigenschaft der Matrix $A$, bei der Sie dieses Problem beheben könnten und erklären Sie grob, wie Sie es in diesem Fall beheben.