

Rieder
Numerik 2

Dauer: 90 min. Lösung: keine Bestanden mit: ? P.
Bemerkungen: (Hilfsmittel, Nachklausur, etc)

Aufgabe 1 (Gemischt) (1 + 3) + 2 = 6 Punkte

- a) (i) Definieren Sie die Householder-Matrix zum Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.
(ii) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ das Spektrum der Householder-Matrix genau die Werte ± 1 beinhaltet. Geben Sie die dazugehörigen Eigenräume an.
- b) Mit $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq n$, betrachten wir das Optimierungsproblem

Finde $x^* \in D$, so dass $g(x^*) = \min\{g(x) \mid x \in D\}$ mit $g(x) = \|F(x)\|_2^2$.

Mit welchem Verfahren lösen Sie diese Aufgabe numerisch? Nennen Sie dessen Namen und geben Sie die Iterationsvorschrift an. Erklären Sie Ihre dabei verwendete Notation.

Aufgabe 2 (Newton-Verfahren) 2 + (2 + 4) = 8 Punkte

- a) Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi(x) = Ax - b$. Unter welchen Voraussetzungen ist das Newton-Verfahren für die Nullstellenaufgabe

Finde $x^* \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(x^*) = 0$.

wohldefiniert? Was können Sie zur Konvergenz des Verfahrens aussagen?

- b) (i) Sei $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^n$ eine gegen $\xi \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge. Formulieren Sie die Definition der linearen Konvergenz von $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$. Ist lineare Konvergenz unabhängig von der zugrundeliegenden Norm?
(ii) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit der einfachen Nullstelle $\xi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von ξ gibt, so dass das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) := x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(0)})}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

linear gegen ξ konvergiert, und zwar für jeden Startwert $x^{(0)} \in U$.

Hinweis: Approximieren Sie $\Phi(x^{(k)}) - \Phi(\xi)$ durch eine Taylor-Entwicklung.

Aufgabe 3 (Eigenwerte) (2 + 2) + 2 = 6 Punkte

- a) (i) Formulieren Sie den Satz von Gerschgorin. Definieren Sie die dabei auftretenden Größen.
(ii) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin: Zur Diagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\tilde{A} = A + E$, $E = \{e_{i,j}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gibt es zu jedem $\tilde{\lambda} \in \sigma(\tilde{A})$ ein $\lambda \in \sigma(A)$ und ein $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass gilt

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \sum_{j=1}^n |e_{i,j}|.$$

- b) Erklären Sie *kurz* die zwei Phasen die zur Eigenwertberechnung mit dem QR-Algorithmus nötig sind.

Aufgabe 4 (Vektoriteration)**3 + 1 + 1 = 5 Punkte**

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Berechnen Sie die erste Iterierte $x^1 \in \mathbb{R}^2$ der inversen Potenzmethode angewandt auf A mit Shift $\tilde{\lambda} = 2$ und Startwert $x^0 = (0, 1)^\top$. Sie können dazu die Matrizen $M, L, R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $M = LR$ benutzen, die definiert sind durch

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

- b) Wie erhalten Sie aus x^1 eine Approximation an einen Eigenwert von A ?
- c) Erklären Sie kurz eine Methode, mit der Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieses Verfahrens verbessern können.

Aufgabe 5 (Quadratur)**4 + (1 + 3) = 8 Punkte**

Sei $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ sowie $\xi_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$ mit $h = (b - a)/N$, $N \in \mathbb{N}$. Für die zusammengesetzte rechtsseitige Rechtecksregel

$$I(f) = h \sum_{n=1}^N f(\xi_n).$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I(f) \right| \leq \frac{b-a}{2} h \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

- a) Zeigen Sie die obige Fehlerabschätzung mithilfe der Entwicklung

$$f(t) = f(\xi_n) + f'(t_n)(t - \xi_n) \quad \text{für ein } t_n \in [\xi_n, \xi_{n+1}].$$

- b) (i) Es soll nun mit der Quadraturformel I das Integral

$$\int_{-1}^3 \cos t \, dt$$

mit einer Genauigkeit von 10^{-3} berechnet werden. Bestimmen Sie die dafür höchstens nötige Anzahl an Stützstellen.

- (ii) Erklären Sie, wie man mit nur einer zusätzlichen Funktionsauswertung die Fehlerordnung in h erhöhen kann. Welche Eigenschaften des Integranden aus (i) sind hierfür erforderlich?