Wieners
Numerische Mathematik 2

Dauer: 90 min. Lösung: keine Bestanden mit: ? P.
Bemerkungen: Nachklausur

Aufgabe 1 (Newton Interpolation) **2+4+2+2=10 Punkte**

Seien $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N$ und $f_0, f_1, \ldots, f_N \in \mathbb{R}$ gegeben. Eine Interpolationsaufgabe sucht ein Polynom $P_N \in \mathbb{P}_N$ mit

$$P_N(\xi_n) = f_n, \quad n = 0, \ldots, N.$$

a) Geben Sie die Newton-Basis von $\mathbb{P}_N$ an.

b) Berechnen Sie zu den gegebenen Stützstellen das Interpolationspolynom P_2 mithilfe der dividierten Differenzen

n	0	1	2
ξ_n	-1	2	3
f_n	1	3	3

.

Hinweis: Sie müssen das Polynom nicht in Monomdarstellung bringen.

c) Betrachten Sie die zusätzliche Stelle $\xi_3 = 5$ mit $f_3 = -1$. Berechnen Sie mit der neuen Stützstelle das Interpolationspolynom P_3.

d) Nennen Sie zwei Nachteile der Lagrange Darstellung gegenüber der Newton Darstellung.

Aufgabe 2 (Splines) **3+3=6 Punkte**

Gegeben Sei die Funktion $S\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S(x) = \begin{cases} -4x^3 + 4x - 1, & x < 0.5, \\ 4x^3 - 12x^2 + 10x - 2, & x \geq 0.5. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der angegebenen Funktion S um einen kubischen Spline handelt.

b) Sei S der interpolierende Spline zu $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit den gegebenen Randwerten $f'(0) = 4, f''(0) = 0, f'(1) = -2$ und $f''(1) = 1$.
Prüfen Sie, welche aus der Vorlesung bekannten Randbedingungen der Spline erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie auch, welche Bedingung verletzt ist, wenn eine der Randbedingungen nicht erfüllt ist.

Aufgabe 3 (Gauß Quadratur) **3+4=7 Punkte**

Gegeben Sei das folgende Integral und Skalarprodukt

$$I(f) = \int_{-1}^{1} u(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

auf der Menge der stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$. Die zugehörigen Orthogonalpolynome heißen Legendre Polynome P_n. Wir betrachten die Gauß-Legendre Quadratur zur Approximation von $I(f)$

a) Definieren Sie die Stützstellen und Gewichte der Gauß-Legendre Quadratur mit N Stützstellen.

b) Zeigen Sie, dass die Quadratur mit N Stützstellen exakt ist für alle Polynome bis zum Grad $2N - 1$.

Aufgabe 4 (Quadratur) **4+2+2+3+2=13 Punkte**

Gegeben seien $f \in C^1[a,b]$ sowie äquidistante Stützstellen $\xi_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$ mit Schrittweite $h = (b-a)/N$. Die summierte (linksseitige) Rechtecksregel ist definiert durch $R_h(f) = \sum_{n=1}^{N} hf(\xi_{n-1})$.

a) Zeigen Sie die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) \mathrm{d}\, t - R_h(f) \right| \le \frac{b-a}{2}\, h \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|\,.$$

b) Geben Sie die summierte Trapezregel $T_h(f)$ an und erklären Sie, warum diese gegenüber der summierten Rechtecksregel bevorzugt werden sollte.

c) Geben Sie die Formel der extrapolierten Trapezregel $T_{k,i}$ an.

d) Zeigen Sie, dass $T_{1,1}$ der Simpsonregel entspricht.

e) Geben Sie einen adaptiven Algorithmus auf Basis der extrapolierten Trapezregel an. Nennen Sie außerdem einen Vorteil gegenüber dem nicht adaptiven Algorithmus.

Aufgabe 5 (Fouriertransformation) **3+3+2+2=10 Punkte**

Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{T}_N$ den Vektorraum der trigonometrischen Polynome

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big)$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \dots, a_N$ und $b_1, \dots, b_N$.

a) Zeigen Sie: $T(t)$ lässt sich auch komplex darstellen als

$$T^{\mathbb{C}}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(\mathrm{i}nt)$$

mit geeigneten $c_n \in \mathbb{C}$.

b) Zeigen Sie: Hat ein trigonometrisches Polynom $T \in \mathbb{T}_N$ mehr als $2N$ verschiedene Nullstellen im Intervall $[0, 2\pi)$, dann sind alle Koeffizienten $a_0 = \dots = a_N = b_1 = \dots = b_N = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie a) und substituieren Sie $y = \exp(\mathrm{i}t)$.

c) Definieren Sie die diskrete Fouriermatrix F_N und geben Sie die Inverse an.

d) Gegeben Sei eine zirkulante Matrix $C \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $N = 2^K, K \in \mathbb{N}$. Erklären Sie kurz, wie Sie die Eigenwerte der Matrix C möglichst effizient bestimmen können. Geben Sie den zugehörigen Aufwand and.