

# Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

## Übungsblatt 1

### Tutoriumsaufgabe 1 (Kehrwerte über Newton-Verfahren)

Die Berechnung des Kehrwerts einer reellen Zahl  $a > 0$  kann mit dem Newton-Verfahren so realisiert werden, dass zur Berechnung nur Additionen und Multiplikationen nötig sind.

(a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle der Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} - a$$

so, dass keine Division dabei nötig ist.

- (b) Bestimmen Sie eine Rekursionsvorschrift für den Fehler  $e_k = 1/a - x_k$  und ermitteln Sie damit genau, für welche Startwerte  $x_0 > 0$  das Verfahren aus (a) gegen  $1/a$  konvergiert.
- (c) Überlegen Sie sich, warum es in unserem Kontext nicht sinnvoll ist, das Newton-Verfahren auf  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = ax - 1$  anzuwenden, um den (nicht verfügbaren) Kehrwert  $1/a$  zu bestimmen.

### Tutoriumsaufgabe 2 (A-priori-Schranke des BFPS)

Sei für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Funktion  $\Phi_\alpha: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\Phi_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y \\ x + \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für die aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz einer eindeutigen Lösung  $(x^*, y^*)^T \in [0, 1]^2$  für die Fixpunktgleichung folgt. Dabei sei  $\mathbb{R}^2$  mit der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  versehen.
- (b) Berechnen Sie für  $\alpha = -\frac{1}{4}$  und für den Startwert  $(x_0, y_0)^T = (0, 0)^T$  mithilfe der a-priori Abschätzung des Banach'schen Fixpunktsatzes die kleinste Anzahl von Iterationsschritten  $k$ , für welche

$$\left\| \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 2^{-7}$$

garantiert werden kann.

### Tutoriumsaufgabe 3 (Newton-Verfahren für lineare Gleichungen)

Wir verwenden das Newton-Verfahren, um die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = Ax - b$$

zu bestimmen, wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär und  $b \in \mathbb{R}^n$  ist.

Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren nach einem Schritt für einen beliebigen Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  die richtige Lösung liefert.

### Hausaufgabe 1 (Newton/Fixpunktiteration in $\mathbb{R}^2$ )

**2 + 4,5 = 6,5 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Iterierten des Newton-Verfahrens durch

$$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_k + \frac{1}{y_k} \\ z_k + \frac{1}{z_k} \end{pmatrix} \quad (1)$$

gegeben sind.

- (b) Sei ein Startvektor  $(y_0, z_0)^T$  mit  $y_0, z_0 \geq 1$  gegeben. Interpretieren Sie (1) als Fixpunktiteration für eine geeignet gewählte Funktion  $\Phi$  und begründen Sie dann mit dem Banach'schen Fixpunktsatz, dass die Iteration (1) konvergiert. Geben Sie außerdem den Grenzwert der Folge  $(y_k, z_k)_k^T$  konkret an.

### Hausaufgabe 2 (Newton für konvexe Funktion) **1,5+1,5+1,5+0,5 = 5 Punkte**

Sei  $f \in C^2([a, \infty))$  mit Nullstelle  $x^* \in [a, \infty)$ . Es gelte zudem

$$f'(x) > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) \geq 0, \quad x \in [a, \infty).$$

Wir betrachten das Newton-Verfahren mit Startwert  $x_0 \in [a, \infty)$ . Die Iterierten des Newton-Verfahrens bezeichnen wir mit  $x_n$ .

(a) Die Voraussetzungen an die Funktion  $f$  implizieren unter anderem

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$$

für alle  $x, y \in [a, \infty)$ . (Das sollen Sie nicht zeigen!)

Zeigen Sie damit  $x^* \leq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (b) Zeigen Sie, dass  $x_{n+1} \leq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $x^*$  konvergiert.
- (d) Erklären Sie, inwiefern sich der Konvergenzbereich (gemeint ist die Menge der Startwerte, sodass das zugehörige Newton-Verfahren konvergiert) hierbei von dem unterscheidet, was Sie im Allgemeinen vom Newton-Verfahren erwarten würden.

**Hausaufgabe 3** (Newton für Nullstellen höherer Ordnung) **2 + 1,5 = 3,5 Punkte**

Gegeben sei eine Funktion  $f \in C^3(\mathbb{R})$ . Diese habe in  $x^*$  eine  $m$ -fache Nullstelle mit  $m \geq 2$ , das heißt  $f$  besitze in einer Umgebung  $U$  von  $x^*$  die Darstellung  $f(x) = (x - x^*)^m h(x)$  für eine Funktion  $h \in C^3(U)$  mit  $h(x) \neq 0$  für  $x \in U$ .

Wir betrachten zur Bestimmung von  $x^*$  sowohl das normale Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

als auch die Variante

$$x_{n+1} = x_n - m \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Im Fall von geradem  $m$  nehmen wir zusätzlich  $h \geq 0$  auf  $U$  an. (Das ist keine wesentliche Einschränkung – es erspart Ihnen nur eine weitere Fallunterscheidung.)

- (a) Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren (3) mit dem (normalen) Newton-Verfahren angewandt auf die Funktion  $g(x) = (x - x^*)h(x)^{\frac{1}{m}}$  übereinstimmt.
- (b) Begründen Sie, warum für das Iterationsverfahrens (2) keine lokal quadratische Konvergenz garantiert werden kann. Zeigen Sie dafür, dass das Iterationsverfahrens (3) lokal quadratisch gegen  $x^*$  konvergiert.

*Bemerkung:* Tatsächlich kann man zeigen, dass das normale Newton-Verfahren (2) in diesem Setting nur lokal linear konvergiert.

---

**Abgabe der Hausaufgaben bis Mittwoch, den 30. April 2025 um 9:45 Uhr** digital im [ILIAS](#).

*Hinweise zur Abgabe:* Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 30. April 2025 besprochen.