

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

Übungsblatt 2

Tutoriumsaufgabe 4 (Gauß-Newton und der Abstiegskampf)

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $m \geq n$. Wir setzen $g(x) = \frac{1}{2} \|f(x)\|_2^2$. Zur Bestimmung des Minimums der Funktion g verwenden wir das Gauß-Newton-Verfahren, welches Iterierte x_k für $k = 0, 1, \dots$ liefert.

(a) Machen Sie sich zunächst kurz folgendes klar:

- Wenn $f'(x_k)$ nicht vollen Rang hat, dann hat das lineare Ausgleichsproblem im Gauß-Newton-Verfahren keine eindeutige Lösung.
- Wenn $f'(x_k)$ vollen Rang hat und $f'(x_k)^T f(x_k) = 0$ gilt, dann ist x_k kritischer Punkt von g , und das Gauß-Newton-Verfahren liefert keine neuen Iterierten mehr.

(b) Nun sei $f'(x_k)^T f(x_k) \neq 0$ und $f'(x_k)$ habe vollen Rang. Zeigen Sie: Δx_k ist eine **Abstiegsrichtung**, das heißt für hinreichend kleines $\lambda > 0$ gilt

$$\|f(x_k + \lambda \Delta x_k)\|_2^2 < \|f(x_k)\|_2^2.$$

Geben Sie dazu zunächst eine explizite Formel für Δx_k an, verwenden Sie dann eine geeignete Taylor-Entwicklung von $f(x_k + \lambda \Delta x_k)$, und analysieren Sie damit die Norm von $f(x_k + \lambda \Delta x_k)$.

Tutoriumsaufgabe 5 (Reelle Schur-Normalform)

Zeigen Sie: Zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} D_1 & * & * & * \\ & D_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & D_m \end{bmatrix},$$

wobei jedes D_i entweder skalar ist oder eine 2×2 -Matrix mit konjugiert komplexen Eigenwerten.

Hausaufgabe 4 (Konvergenz des vereinfachten Newton-Verfahrens) 5 Punkte

Beweisen Sie Satz 5.9 aus der Vorlesung:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Sei $x_0 \in \Omega$ Startwert des vereinfachten Newton-Verfahrens. Wir nehmen an, dass es Konstanten $\alpha \geq 0$ und $\gamma \in [0, 1)$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\|\Delta x_0\| \leq \alpha$,
- $\|I - A^{-1} f'(x)\| \leq \gamma < 1$ für alle $x \in \Omega$,
- $B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \rho\} \subseteq \Omega$ für $\rho = \frac{\alpha}{1-\gamma}$

Dann gibt es in $B(x_0, \rho)$ genau eine Nullstelle \hat{x} von f , und für die Iterierten x_k des vereinfachten Newton-Verfahrens gilt

$$x_k \in B(x_0, \rho) \subseteq \Omega, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x}$$

und die Abschätzung

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\| \leq \gamma \|x_k - \hat{x}\|.$$

Hausaufgabe 5 (Lineare Transformationen im Gauß-Newton-Verfahren) 5 Punkte

Wir betrachten das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\frac{1}{2} \|f(x)\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n}!$$

für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$. Wir nehmen an, dass $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ vollen Rang hat.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Das Gauß-Newton-Verfahren werde nun **zweimal** durchgeführt (für verschiedene Funktionen und Startwerte):

- 1.) Das erste Mal direkt für die gegebene Funktion f mit dem Startwert $y_0 = Ax_0$. Die Iterierten bezeichnen wir mit y_k für $k = 0, 1, \dots$.
- 2.) Das zweite Mal für die Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch $\tilde{f}(x) = f(Ax)$ mit dem Startwert x_0 . Die Iterierten bezeichnen wir mit x_k für $k = 0, 1, \dots$.

Zeigen Sie, dass $y_k = Ax_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Hausaufgabe 6 (Spektrum reduzibler Matrizen)

5 Punkte

Beweisen Sie Lemma 6.1.2:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reduzible Matrix, d.h. es gelte

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

für eine Permutationsmatrix P und Matrizen

$$A_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}, \quad A_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}, \quad A_{12} \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}.$$

Dann ist $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$.

Abgabe der Hausaufgaben bis **Mittwoch, den 14. Mai 2025** um **9:45 Uhr** digital im [ILIAS](#).

Hinweise zur Abgabe: Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 14. Mai 2025 besprochen.