Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

Übungsblatt 3

Erinnerung (lineare Algebra): Jede Matrix $A \in C^{n\times n}$ ist ähnlich zu einer Matrix J in Jordan-Normalform, d.h. zu einer Blockdiagonalmatrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_m}(\lambda_m) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s\times s} \tag{1}$$

und $\sum_{j=1}^m n_j = n$. Dabei ist also $J_s(\lambda)$ ein Jordan-Kästchen der Länge s zum Eigenwert λ. Es kann zu einem Eigenwert λ mehrere Jordan-Kästchen geben. Bis auf die Reihenfolge der Jordan-Kästchen ist die Jordan-Normalform eindeutig bestimmt. Falls $n_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ (und somit $m = n$), dann ist die Matrix A diagonalisierbar.

Tutoriumsaufgabe 6 (Potenzmethode, A nicht diagonalisierbar)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix, die einen dominierenden Eigenwert $\lambda_\star$ hat (d.h. einen Eigenwert der einfach und betragsmäßig echt größer als alle anderen Eigenwerte ist). Sei außerdem y_0 ein Startvektor, der eine Komponente entlang eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_\star$ hat, und sei $y_{k+1} = Ay_k$, $k = 0, 1, \dots$.

Zeigen Sie: Die Vektoren $\frac{1}{\lambda_\star^k} y_k$, $k \in \mathbb{N}$, konvergieren gegen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_\star$. (2)

Hinweis: Im Gegensatz zur Vorlesung (Satz 6.17) ist A nicht unbedingt diagonalisierbar. Nutzen Sie stattdessen die Jordan-Normalform und zeigen Sie zunächst, dass für ein Jordan-Kästchen gilt

$$J_s(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{s-1}\lambda^{k-(s-1)} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

wobei $\binom{a}{b} = 0$ für $b > a$. Schreiben Sie dazu $J_s(\lambda) = \lambda I_s + N$ für eine geeignete Matrix N und nutzen Sie den binomischen Lehrsatz.

Tutoriumsaufgabe 7 (Gershgorin-Kreise)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Vereinigung $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ der Gershgorin-Kreisscheiben von A.

(b) Bestimmen Sie die Vereinigung $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{D}}_2$ der Gershgorin-Kreisscheiben von $A^\top$.

(c) Bestimmen Sie (wie in der linearen Algebra) die tatsächlichen Eigenwerte von A.

(d) Sehen Sie anhand dieses Beispiels ein, dass

$$\left(\mathcal{D}_1 \cap \widetilde{\mathcal{D}}_1\right) \cup \left(\mathcal{D}_2 \cap \widetilde{\mathcal{D}}_2\right) \neq \left(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2\right) \cap \left(\widetilde{\mathcal{D}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{D}}_2\right). \tag{3}$$

Machen Sie sich klar, in welcher der beiden Mengen die Eigenwerte nach dem Satz von Gershgorin liegen. Zeichnen Sie diese Menge, und markieren Sie die Lage der Eigenwerte von A darin.

Hinweis: In vergangenen Klausuren hatte sich mehrfach gezeigt, dass viele Studierende in (3) fälschlicherweise ein "=" angenommen hatten.

Hausaufgabe 7 (Potenzmethode, A nicht diagonalisierbar) **4 + 2.5 = 6.5 Punkte**

(a) Für ein $s \in \mathbb{N}$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $A = J_s(\lambda)$ ein Jordan-Kästchen, siehe (1). Weiter sei $0 \neq y_0 \in \mathbb{C}^s$ ein beliebiger Startvektor und $y_{k+1} = Ay_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie eine zu (2) analoge Aussage (dazu muss eine angepasste Skalierung gewählt werden).

(b) Sei nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix, die einen betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_\star$ hat, der aber nicht notwendigerweise einfach ist, sondern zu dem es ein Jordan-Kästchen beliebiger Größe geben kann. Sei außerdem wieder $0 \neq y_0 \in \mathbb{C}^n$ ein Startvektor und $y_{k+1} = Ay_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Diskutieren Sie im Hinblick auf Teil (a) und Tutoriumsaufgabe 6 kurz das Verhalten der Vektoren $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$.

Hausaufgabe 8 (Eigenwert-Vorhersage) **5 + 3.5 = 8.5 Punkte**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: Die Matrix A hat

- 2 Eigenwerte im Intervall $[-1, 4]$,
- 1 Eigenwert im Intervall $[5, 9]$,
- 2 Eigenwerte im Schnitt der Mengen $B_4(12)$ und $B_2(12) \cup B_6(19)$, wobei $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}$,
- 1 Eigenwert im Intervall $[17, 21]$,

ohne die Eigenwerte direkt zu berechnen. Nutzen Sie stattdessen alle Eigenschaften und Sätze zu Eigenwerten von Matrizen, die in der Vorlesung und den Tutorien besprochen wurden.

(b) Was können Sie mit dem Wissen aus Teil (a) über Grenzwert der Rayleigh-Quotienten sowie die maximale/minimale Konvergenzgeschwindigkeit

(i) der Potenzmethode

(ii) der inversen Potenzmethode mit Shift $\mu = 7$

angewandt auf A aussagen? Gehen Sie dabei jeweils davon aus, dass ein Startvektor verwendet wird, in dessen Basisdarstellung bzgl. einer Basis aus Eigenvektoren alle Koeffizienten ungleich Null sind.

Abgabe der Hausaufgaben bis **Mittwoch, den 28. Mai 2025** um **9:45 Uhr** digital im ILIAS.

Hinweise zur Abgabe: Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 28. Mai 2025 besprochen.