Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, M. Sc. Michael Kirn

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

Übungsblatt 4

Tutoriumsaufgabe 8 (Rechenbeispiel Transformation auf Hessenberg-Form)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 7 & -7 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie die Matrix A durch Ähnlichkeitstransformation in Hessenberg-Form.

Tutoriumsaufgabe 9 (Aufwand QR-Zerlegung Hessenberg-Matrix)

Zeigen Sie, dass zur Berechnung der QR-Zerlegung einer oberen Hessenberg-Matrix $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nur ein (asymptotischer) Hauptaufwand von $4n^2$ (statt den sonst üblichen $\mathcal{O}(n^3)$) komplexen Elementaroperationen notwendig sind.

Sie können dabei wie folgt vorgehen:

(i) Sei w_1 die erste Spalte von H. Geben Sie (durch $*$ angedeutet) die Nicht-Nullen-Struktur der Householder-Transformation

$$Q_{v_1} = I_m - \frac{2}{\|v_1\|_2^2} v_1 v_1^\top$$

an, die w_1 auf ein Vielfaches von e_1 abbildet. Geben Sie auch die Nicht-Nullen-Struktur von $Q_{v_1}H$ an.

(ii) Überlegen Sie sich nun, wie alle weiteren Schritte zur Berechnung der QR-Zerlegung aussehen müssen.

(iii) Zählen Sie alle relevanten Elementaroperationen.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Multiplikation einer komplexen Householder-Transformation $Q_v \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mit einem Vektor $w \in \mathbb{C}^k$ durch $4k$ komplexe Elementaroperationen berechnet werden kann.

Tutoriumsaufgabe 10 (Aufwand Householder-Transformation hermitescher Matrizen)

Gegeben sei eine **hermitesche** Matrix $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und eine Householder-Transformation $Q_u = I_k - 2uu^{\mathrm{H}}$ mit $u \in \mathbb{C}^k$ und $\|u\|_2 = 1$.

Wir möchten in dieser Aufgabe einsehen, dass man mit einer geschickten Strategie das Produkt $\hat{A} = Q_u A Q_u$ mit einem (asymptotischen) Hauptaufwand von $4k^2$ komplexen Elementaroperationen berechnen kann. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Berechnen Sie das Produkt $\hat{A} = Q_u A Q_u$ durch Ausmultiplizieren.
2. Setzen Sie $v = -2Au$ und vereinfachen Sie das Ergebnis aus 1.
3. Definieren Sie $\alpha = -u^{\mathrm{H}}v$ und $w = v + \alpha u$ und vereinfachen Sie damit weiter.
4. Sehen Sie nun ein, warum der Hauptaufwand der Berechnung in $4k^2$ komplexen Elementaroperationen zu schaffen ist.

   Hinweis: Denken Sie daran, dass $\hat{A}$ hermitesch ist. Sie brauchen also nur etwas mehr als die Hälfte aller Einträge überhaupt zu berechnen!

Hausaufgabe 9 (Aufwand Transformation zu Hessenberg) **3 + 2 = 5 Punkte**

In Satz 6.22 der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $n-2$ (komplexe) Householder-Transformationen $U_1, \dots, U_{n-2}$ auf Hessenberg-Form gebracht werden kann, das heißt

$$U^{\mathrm{H}}AU = H = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & & & \vdots \\ 0 & h_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $U = U_1 \cdots U_{n-2}$.

(a) Zeigen Sie, dass der (asymptotische) Hauptaufwand zur Berechnung dieser Hessenberg-Form $\frac{10}{3}n^3$ komplexe Elementaroperationen sind.

Hinweis: Sie müssen dazu nicht alle Operationen zählen, sondern nur die, die auch in den asymptotisch dominanten Term einfließen. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Multiplikation einer komplexen Householder-Transformation $Q_v \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mit einem Vektor $w \in \mathbb{C}^k$ durch $4k$ komplexe Elementaroperationen berechnet werden kann. Nutzen Sie außerdem, dass $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ gilt.

(b) Nun sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch**. Dann ist auch H hermitesch (klar, oder?) und daher eine Tridiagonalmatrix.

Zeigen Sie unter Verwendung von Tutoriumsaufgabe 10, dass der Hauptaufwand zur Berechnung der Hessenberg-Form jetzt auf $\frac{4}{3}n^3$ komplexe Elementaroperationen reduziert werden kann.

Hinweis: Ein naives Vorgehen ohne die Überlegung aus Tutoriumsaufgabe 16 würde nur eine Reduktion auf $\frac{8}{3}n^3$ liefern. Daher sind die Symmetrie-Überlegungen aus Tutoriumsaufgabe 16 an dieser Stelle entscheidend.

Hausaufgabe 10 (Ähnlichkeit im QR-Algorithmus) **4 Punkte**

Beweisen Sie Lemma 6.21: Für die Matrizen A_k, Q_k und R_k aus dem QR-Algorithmus mit Shifts $\mu_k \in \mathbb{C}$ gilt

$$A_k = U_k^H A U_k, \qquad U_k := Q_0 Q_1 \dots Q_{k-1},$$
$$p_k(A) := \prod_{j=0}^{k} (A - \mu_j I) = U_{k+1} T_{k+1}, \qquad T_{k+1} := R_k \dots R_0.$$

Hausaufgabe 11 (Deflation bei bekanntem Eigenvektor) **3 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir nehmen an, dass bereits ein Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ zu einem Eigenwert λ_1 von A bekannt sei. Zeigen Sie, dass es eine Householder-Transformation $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$QAQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & c^\top \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \tag{1}$$

für gewisse $c \in \mathbb{C}^n$ und $B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ erfüllt ist. Geben Sie die dazu nötige Householder-Transformation Q konkret an. Nennen Sie außerdem in ein bis zwei Sätzen, was man mit dem Ergebnis in (1) anfangen kann.

Hinweis: Welchen Vektor sollte man für Qe_1 erhalten, um (1) realisieren zu können? Für welchen Householder-Vektor sollten Sie sich demnach entscheiden?

Hausaufgabe 12 (Doppelshifts) **3 Punkte**

Nach k Schritten des QR-Algorithmus sei eine Hessenberg-Matrix $H_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Ausgehend von H_k betrachten wir zwei QR-Schritte mit Shifts $\mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} H_k - \mu_k I &= Q_k R_k && \text{(QR-Zerlegung)} \\ H_{k+1} &= R_k Q_k + \mu_k I \\ H_{k+1} - \mu_{k+1} I &= Q_{k+1} R_{k+1} && \text{(QR-Zerlegung)} \\ H_{k+2} &= R_{k+1} Q_{k+1} + \mu_{k+1} I. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix $M = Q_k Q_{k+1} R_{k+1} R_k$

(a) im Allgemeinen die Darstellung $M = H_k^2 - (\mu_k + \mu_{k+1}) H_k + \mu_k \mu_{k+1} I$ gilt.

(b) im Fall $\mu_{k+1} = \overline{\mu_k}$ die Darstellung $M = H_k^2 - 2\mathrm{real}(\mu_k) H_k + |\mu_k|^2 I$ gilt.

Abgabe der Hausaufgaben bis **Mittwoch, den 18. Juni 2025** um **9:45 Uhr** digital im ILIAS.

Hinweise zur Abgabe: Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 18. Juni 2025 besprochen.