

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

Übungsblatt 5

Tutoriumsaufgabe 11 (Eigenschaften Singulärwertzerlegung)

Beweisen Sie Satz 6.31: Für die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^H$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ gilt:

- (i) $A^H A v_i = \sigma_i^2 v_i$ für $i = 1, \dots, n$, d.h. σ_i^2 ist Eigenwert von $A^H A$ zum Eigenvektor v_i .
- (ii) $A A^H u_i = \sigma_i^2 u_i$ für $i = 1, \dots, n$, d.h. σ_i^2 ist Eigenwert von $A A^H$ zum Eigenvektor u_i . Alle andere Eigenwerte sind Null.
- (iii) $\|A\| = \sigma_1$.
- (iv) Falls $m = n$ und A invertierbar ist, gilt $\|A^{-1}\| = \sigma_n^{-1}$.
- (v) Falls $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p > \sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$, so ist $\text{Rang}(A) = p$.
- (vi) $A v_i = \sigma_i u_i$, $i = 1, \dots, p$ und $A v_i = 0$, $i = p + 1, \dots, n$.
- (vii) $A^H u_i = \sigma_i v_i$, $i = 1, \dots, p$ und $A^H u_i = 0$, $i = p + 1, \dots, m$.

Tutoriumsaufgabe 12 (Rechenbeispiel Arnoldi/GMRES/FOM)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie den Arnoldi-Algorithmus bis zum Abbruch durch. Geben Sie dabei in jedem Schritt die Matrizen V_m , H_m und \tilde{H}_m sowie die Arnoldi-Relation (d.h. den Zusammenhang der Matrizen A , V_m und \tilde{H}_m bzw. H_m) an. Bestimmen Sie außerdem die Näherungslösungen, welche die Ansätze (G) mit $\mathcal{W}_M = \mathcal{K}_m(A, b)$ (FOM-Verfahren) und (M) in jedem Schritt liefern.

Tutoriumsaufgabe 13 (Eigenschaften Arnoldi-Algorithmus)

Beweisen Sie Lemma 7.6 (c) - (e): Seien V_m und \tilde{H}_m die Matrizen aus dem Arnoldi-Algorithmus und sei $h_{m+1,m} \neq 0$. Dann gilt

- (c) $V_m^H A V_m = H_m$
- (d) $V_{m+1}^H A V_m = \tilde{H}_m$
- (e) Wenn $A = A^H$, dann ist $H_m = H_m^H$ tridiagonal.

Hausaufgabe 13 (Krylov-Räume stagnieren? Umso besser!)

4 Punkte

Zu gegebenem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{C}^n$ sei $\ell \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, für die $\mathcal{K}_{\ell+1}(A, b) = \mathcal{K}_\ell(A, b)$ gilt.

- (a) Zeigen Sie: Es gilt $\mathcal{K}_m(A, b) = \mathcal{K}_\ell(A, b)$ für alle $m \geq \ell$.
- (b) Zeigen Sie anhand der Definition von Krylov-Räumen (also ohne Lemma 7.7): Die exakte Lösung $x = A^{-1}b$ des LGS $Ax = b$ ist
 - (i) in $\mathcal{K}_\ell(A, b)$ enthalten,
 - (ii) in $\mathcal{K}_m(A, b)$ für $m < \ell$ nicht enthalten.

Hausaufgabe 14 (Fehlernorm versus Residuenorm)

3 Punkte

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Approximationen der Lösung von $Ax = b$, wobei $x_0 = 0$ sei. Zeigen Sie, dass für

$$\hat{x} := A^{-1}b, \quad f_m := \hat{x} - x_m \quad \text{und} \quad r_m := A(\hat{x} - x_m) = A f_m, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r_m\|}{\|r_0\|} \leq \frac{\|f_m\|}{\|f_0\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r_m\|}{\|r_0\|}.$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{C}^n und $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die Konditionszahl von A bzgl. der induzierten Matrixnorm.

Hinweis: Wegen $x_0 = 0$ gilt also $f_0 = \hat{x}$ und $r_0 = b$

Hausaufgabe 15 ((M) und (G) liefern exakte Lösung bei Abbruch)

3 Punkte

Beweisen Sie Satz 7.8: Sei $AV_m = V_m H_m$, sei W_m Basis von \mathcal{W}_m und sei $W_m^H V_m$ nicht singular. Ist y_m durch (M) oder (G) charakterisiert, dann ist $x_m := V_m y_m = \hat{x} = A^{-1}b$ die exakte Lösung.

Hausaufgabe 16 (Rechenbeispiel GMRES/FOM)

5 Punkte

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{H}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei V_3 und \tilde{H}_3 aus dem Arnoldi-Prozess stammen. Berechnen Sie die Näherungslösungen x_1, \dots, x_3 , welche die Ansätze (G) mit $\mathcal{W}_M = \mathcal{K}_m(A, b)$ (FOM-Verfahren) und (M) in jedem Schritt liefern.

Abgabe der Hausaufgaben bis **Mittwoch, den 2. Juli 2025** um **9:45 Uhr** digital im [ILIAS](#).

Hinweise zur Abgabe: Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 2. Juli 2025 besprochen.