

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

Übungsblatt 6

Tutoriumsaufgabe 14 (Konvergenz des GMRES-Verfahrens)

In der gesamten Aufgabe sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und x_m die m -te Iterierte des GMRES-Verfahrens. Das zugehörige Residuum ist $r_m = b - Ax_m$.

(a) Zeigen Sie mit Satz 7.9

$$\|r_m\|_2 = \min_{\substack{p \in \mathbb{P}_m \\ p(0)=1}} \|p(A)b\|_2.$$

(b) Nun sei $A = VDV^{-1}$ diagonalisierbar mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und regulärer Matrix $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Zeigen Sie

$$\|r_m\|_2 \leq \kappa_2(V) \max_{i=1}^n |p(\lambda_i)| \|b\|_2$$

für jedes $p \in \mathbb{P}_m$ mit $p(0) = 1$.

Wie kann man die Aussage für normale Matrizen A vereinfachen?

(c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, so gilt

$$\|r_m\|_2 \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^m \|b\|_2, \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

(d) Vergleichen Sie die in dieser Aufgabe bewiesene Abschätzung mit Satz 7.15 und 7.16 aus der Vorlesung. Welche Unterschiede stellen Sie fest?

Hinweis: Schauen Sie sich im Anschluss an diese Aufgabe erneut den letzten Abschnitt des von Ihnen bearbeiteten Notebooks zum Arnoldi-Prozess und GMRES-Verfahren an. Können Sie sich jetzt die Ergebnisse auch theoretisch erklären?

Tutoriumsaufgabe 15 (Eigenwert-Cluster beim CG-Verfahren)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spd mit größtem Eigenwert $\lambda_1 > 1$. Außerdem seien alle weiteren Eigenwerte $\lambda \in \lambda(A) \setminus \{\lambda_1\}$ so, dass die Eigenschaft

$$|\lambda - 1| < \varepsilon$$

für ein $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt. Es liegt also ein „Cluster“ von Eigenwerten um die Zahl 1 vor, während λ_1 ein „Ausreißer“ sein kann (falls λ_1 deutlich größer als $1 + \varepsilon$ ist).

Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|\hat{x} - x_2\|_A \leq \varepsilon \|\hat{x} - x_0\|_A.$$

Schon nach zwei Schritten ist die Genauigkeit des CG-Verfahrens also sehr gut und hängt im Wesentlichen nur vom Radius ε des Clusters ab.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.15 mit einem geeigneten Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{P}_2$.

Tutoriumsaufgabe 16 (Linke und rechte Lanczos-Vektoren)

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und ein Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine nichtsinguläre Matrix mit der Eigenschaft, dass $A^T = SAS^{-1}$ gilt. (Eine solche Matrix gibt es immer).

Zeigen Sie: Wenn $w_1 = Sv_1$ und $\gamma_k = \hat{\gamma}_k$ für $k \geq 2$ gilt, so gilt zwischen den rechten Lanczos-Vektoren w_k und den linken Lanczos-Vektoren $\{w_k\}$ die Beziehung $w_k = Sv_k$ für alle $k = 1, 2, \dots$.

Hinweis: Man sieht leicht ein, dass der Lanczos-Algorithmus liefert für reelle Probleme auch reelle Vektoren v_k, w_k und reelle Koeffizienten $\alpha_m, \beta_m, \hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m$ liefert.

Hausaufgabe 17 (Invarianten des GMRES-Verfahrens) 2 + 3 = 5 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des GMRES-Verfahrens zur Lösung von $Ax = b$. (Die zugehörigen Residuen bezeichnen wir wieder mit r_m .)

- Das Verfahren ist skalierungsinvariant: Wendet man das Verfahren auf die skalierte Gleichung $\sigma Ax = \sigma b$ mit $\sigma > 0$ an, so gilt für die ursprünglichen Residuen r_m und neuen Residuen \hat{r}_m der Zusammenhang $\hat{r}_m = \sigma r_m$.
- Das Verfahren ist invariant unter orthogonalen Transformationen: Wendet man das Verfahren auf die Gleichung $QAQ^T x = Qb$ mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ an, so gilt der Zusammenhang $\hat{r}_m = Qr_m$.

Überlegen Sie sich dabei auch welcher Zusammenhang zwischen den Iterierten y_m bzw. \hat{y}_m besteht.

Hausaufgabe 18 (Fehlerabschätzung für das CG-Verfahren) **5 Punkte**

Beweisen Sie Satz 7.15 aus der Vorlesung.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.14 und gehen Sie ähnlich vor wie in Tutoriumsaufgabe 15 (a).

Hausaufgabe 19 (Frühere Terminierung CG-Verfahren) **2.5 + 2.5 = 5 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spd und $b \in \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die exakte Lösung nach höchstens k Schritten liefert (in rundungsfehlerfreier Arithmetik), wenn jeweils **eine** der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) Das Residuum $r_0 = b - Ax_0$ ist Linearkombination von k Eigenvektoren von A .

Hinweis: Verwenden Sie Hausaufgabe 13 (Übungsblatt 5).

- (b) A hat höchstens k paarweise verschiedene Eigenwerte.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.15.

Abgabe der Hausaufgaben bis Mittwoch, den 16. Juli 2025 um 9:45 Uhr digital im [ILIAS](#).

Hinweise zur Abgabe: Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 16. Juli 2025 besprochen.