

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2025

Übungsblatt 7

Tutoriumsaufgabe 17 („Kontinuierlicher“ Faltungssatz)

Beweisen Sie Satz 8.10: Sind $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und 2π -periodisch, so ist die Faltung $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls stetig und 2π -periodisch und es gilt

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tutoriumsaufgabe 18 (Rechenbeispiel diskrete Fouriertransformation)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $x \in [0, 2\pi)$ durch $f(x) = \frac{2|x-\pi|}{\pi}$ gegeben ist, und für $x \notin [0, 2\pi)$ periodisch fortgesetzt wird.

In dieser Aufgabe soll das trigonometrische Interpolationspolynom p_4 zu der Funktion f bestimmt werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Überlegen Sie sich zunächst, welches die Funktionswerte von f sind, auf denen die Berechnung von p_4 basiert.
- Bestimmen Sie die Fouriermatrix für $N = 4$, vereinfachen Sie diese soweit möglich, und nutzen Sie diese, um die diskrete Fouriertransformierte zu f zu bestimmen.
- Bestimmen Sie auch mit schneller Fouriertransformation die diskrete Fouriertransformierte zu f und stellen Sie sicher, dass Sie dasselbe Ergebnis wie in (b) erhalten.
- Stellen Sie das trigonometrische Interpolationspolynom p_4 auf.

Tutoriumsaufgabe 19 (Numerische Differentiation lokal und global)

Wir betrachten eine 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, von der wir uns die Funktionswerte $f(\xi_j)$ mit $\xi_j = jh$ und $h = 2\pi/N$ für $j = 0, \dots, N-1$ merken.

Am Ende von Abschnitt 8.2 wurden zwei Möglichkeiten vorgestellt, die Ableitung $f'(\xi_j)$ für $j = 0, \dots, N-1$ zu approximieren (Finite Differenzen und spektrale Differentiation).

- Erklären Sie in beiden Fällen grob, wie man $(f'(\xi_j))_{j=0}^{N-1}$ aus $(f(\xi_j))_{j=0}^{N-1}$ in einem Algorithmus berechnen würde.
- Überschlagen Sie den asymptotischen Aufwand in Abhängigkeit von N , um in beiden Fällen $(f'(\xi_j))_{j=0}^{N-1}$ aus $(f(\xi_j))_{j=0}^{N-1}$ zu berechnen.
- Erörtern Sie, inwiefern die beiden hier diskutierten Approximationen von f' „global“ bzw. „lokal“ sind.

Hausaufgabe 20 (Umkehrformel und Parseval)

1.5 + 2.5 = 4 Punkte

Beweisen Sie Lemma 8.2 (b) und (c) erbracht: Die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sei absolut summierbar und die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Dann gilt

- (b) die Umkehrformel

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

- (c) die Parseval'sche Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Hausaufgabe 21 (Differentiation und Fourier-Transformation) 3 + 1 = 4 Punkte

Beweisen Sie Lemma 8.8: Sei $f \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine 2π -periodische Funktion. (Dann sind $f', f'', \dots, f^{(p)}$ auch 2π -periodisch.) Dann gilt

- $\widehat{f^{(p)}}(k) = (ik)^p \widehat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$,
- $|\widehat{f}(k)| \leq C|k|^{-p}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und eine (von f abhängige) Konstante C .

Hinweis: Verwenden Sie in (a) partielle Integration und führen Sie den Fall $p > 1$ auf $p = 1$ zurück. Teil (b) können Sie aus (a) folgern.

Hausaufgabe 22 (Aliasing)

3 Punkte

Beweisen Sie Satz 8.14: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und stetig und $(\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ absolut summierbar. Dann gilt

$$\widehat{f}_N(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k + \ell N).$$

Hausaufgabe 23 (Fehler der trigonometrischen Interpolation)

4 Punkte

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine 2π -periodische Funktion und sei $N \geq 4$ gerade. Laut Vorlesung interpoliert das trigonometrische Polynom

$$p_N(x) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_N(k) e^{ikx}$$

die Funktion f in den Knoten $\xi_j = 2\pi j/N$ für $j = 0, \dots, N-1$.

Zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler die Abschätzung

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{C}{N}$$

mit einer von N unabhängigen Konstanten $C \geq 0$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{m-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ gilt.

Abgabe der Hausaufgaben bis Mittwoch, den 30. Juli 2025 um 9:45 Uhr digital im [ILIAS](#).

Hinweise zur Abgabe: Schreiben Sie auf das erste Blatt sauber Ihren Namen und Ihre Tutoriumsnummer. Falls Sie zu zweit abgeben, dann beide Namen und Tutoriumsnummern aufschreiben, aber **nur einmal hochladen**. Wir akzeptieren nur **eine einzelne PDF-Datei**. Bitte achten Sie darauf, die Dateigröße gering zu halten und komprimieren Sie diese, falls nötig. Laden Sie die PDF-Datei dort hoch, wo Sie das Übungsblatt gefunden haben.

Die Hausaufgaben werden in der Übung am Mittwoch, den 30. Juli 2025 besprochen.

Wahlen der Verfassten Studierendenschaft

Du möchtest gerne mitbestimmen, wer uns Studierende gegenüber dem KIT vertritt? Vom **21. Juli bis 25. Juli** wird gewählt!

Dabei geht es um den **Fachschaftsvorstand**, der die Studierenden gegenüber der Fakultät vertritt und die Fachschaftsarbeit koordiniert, und um das **Studierendenparlament**, welches das KIT-weite legislative Gremium der Verfassten Studierendenschaft ist.

Gewählt werden kann den ganzen Tag über bei den Wahlurnen, insbesondere im Mathebau-Atrium und vor dem Infobau. Außerdem gibt es dort **Kekse!**

