04.08.2016
Wieners

Optimierungstheorie, SS16 Haupt

Aufgabe 1 (Das Simplex-Verfahren) **12 = 2+8+2 Punkte**

Betrachten Sie das folgende lineare Problem:

$$\min.\ (-1,-2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad \text{unter} \qquad \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \quad x_1 \geq 0 \tag{LP}$$

a) Stellen Sie das Hilfsproblem zu (LP) für Phase I des Simplex-Algorithmus auf.

Vorsicht: Es wird in (LP) nur $x_1 \geq 0$ gefordert!

b) Lösen Sie (LP) mithilfe des Zweiphasen-Simplex-Algorithmus und bestimmen Sie einen Minimierer sowie den minimalen Zielfunktionswert.

Geben Sie dabei insbesondere die Starttableaus zu Phase I und Phase II an.

Hinweis: Wählen Sie für das Pivotelement immer eine Spalte möglichst weit links und möglichst weit unten.

c) Beschreiben Sie *kurz*, welche zwei wesentlichen Informationen dem Ergebnistableau von Phase I aus b) für den Start von Phase II entnommen werden können.

Tipp: Wenn Sie beim Simplex-Verfahren länger als 15 Minuten rechnen, schauen Sie sich erst einmal die anderen Aufgaben an...

Aufgabe 2 (Konvexe Kegel) **9 = 5+(2+2) Punkte**

Hinweis: Kegel und konvexe Mengen sind für allgemeine $\mathbb{R}$-Vektorräume genauso definiert wie im $\mathbb{R}^N$.

a) Zeigen Sie: Ein Kegel $\mathcal{C}$ ist genau dann konvex, wenn

$$x, y \in \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad x + y \in \mathcal{C}\,. \tag{*}$$

b) Sei $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge der Funktionen auf $\mathbb{R}^N$, die zusammen mit

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

für $f, g \in \mathcal{F}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

Zeigen Sie für die Menge $\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ konvex}\} \subset \mathcal{F}$ der konvexen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$:

(i) $\mathcal{C}$ ist ein Kegel.

(ii) $\mathcal{C}$ ist ein konvexer Kegel.

Aufgabe 3 (Dualität linearer Probleme) **9 = 1+3+5 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$, $c \in \mathbb{R}^N$.
Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\text{min. } c^\top x \quad \text{unter} \quad Ax = b,\ x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{LP}$$

a) Geben Sie das duale Problem (LD) zu (LP) an.

b) Formulieren und beweisen Sie den schwachen Dualitätssatz für lineare Probleme.

c) Seien $z \in \mathbb{R}^K$ und $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^N$ gegeben.
Zeigen Sie mithilfe des *starken* Dualitätssatzes für lineare Probleme

$$\min\left\{z^\top Ax \colon e^\top x = 1,\ x \geq 0\right\} = \min\left\{(A^\top z)_n \colon n \in \{1, \dots, N\}\right\}.$$

Aufgabe 4 (Differenzierbare Optimierung) **10 = 2+4+2+2 Punkte**

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\text{min. } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{unter} \quad x_1^2 - 4x_1 + 4x_2^2 \leq 0 \tag{P}$$

a) Zeigen Sie, dass (P) ein konvexes Problem ist.

b) Zeigen Sie, dass das duale Problem zu (P) gegeben ist durch

$$\text{max. } \frac{16u}{1+4u} - 4u \qquad \text{auf} \qquad [0, \infty). \tag{D}$$

Hinweis: Es gilt $\frac{16u}{1+4u} = \frac{64u^2+16u}{(1+4u)^2}$.

c) Zeigen Sie, dass $\big((2,1), 1/4\big)^\top$ ein KKT-Punkt von (P) ist.

d) Prüfen Sie, ob der KKT-Punkt $\big((2,1), 1/4\big)^\top$ der hinreichenden Bedingung zweiter Ordnung für ein lokales Minimum genügt.

Aufgabe 5 (Konvexe Optimierung) **8 = 2.5+2.5+3 Punkte**

Betrachten Sie für $a = (1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^N$ und $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^N$ das Problem

$$\text{min. } \sum_{n=1}^{N} n x_n^2 \qquad \text{unter} \qquad \|x - a\|_2^2 \leq 4N^2, \quad e^\top x = 1, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{KP}$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Zielfunktion von (KP) gleichmäßig konvex ist und dass sich (KP) als Problem auf $\mathbb{R}^N$ mit konvexen Ungleichungs- und linearen Gleichungsnebenbedingungen schreiben lässt.

b) Beweisen Sie, dass (KP) eine eindeutige Lösung besitzt, *ohne* diese auszurechnen.

c) Zeigen Sie, dass das duale Problem von (KP) ebenfalls eine Lösung besitzt, *ohne* dass Sie das duale Problem aufstellen.