Kirsch
Optimierungstheorie

Dauer: Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.
Bemerkungen: (zB Hilfsmittel, Nachklausur, etc)

Aufgabe 1 *(9 Punkte)*:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie: f ist genau dann konvex, wenn die Menge

$$K_f \;=\; \big\{(x,y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^n\,,\ y \geq f(x)\big\} \quad \text{eine konvexe Menge in } \mathbb{R}^{n+1} \text{ ist.}$$

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*:

Bestimmen Sie eine Lösung des folgenden Optimierungsproblems mit Hilfe des Simplexverfahrens:

Minimiere $x_1 - 2x_2 - x_3$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 2\,, \\ & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0\,, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 2\,, \end{array} \qquad x_2 \geq 0\,,\ x_3 \geq 0\,.$$

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*:

Es sei das folgende lineare Optimierungsproblem gegeben:

Maximiere $-7x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 21x_4$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & \leq & \beta\,, \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & \leq & 1\,, \end{array} \qquad x_j \geq 0\,,\ j = 1, \ldots, 4\,,$$

mit einem Parameter $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Stellen Sie das duale Problem auf.

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt das duale Problem eine Lösung? Bestimmen Sie für diese β die Lösung des dualen Problems graphisch.

Aufgabe 4 *(11 Punkte)*:

Gegeben seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = e^{|x_1|} - |x_1|, \qquad g(x) = x_1.$$

Sei weiterhin

$$(P) \qquad \text{Minimiere } f(x) \quad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq 0,\ x_1 - x_2 = 0\}.$$

Das duale Problem hierzu ist gegeben durch

$$(D) \qquad \text{Maximiere } F(u,v) \quad \text{auf} \quad N = \{(u,v)^\top \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0,\ F(u,v) > -\infty\},$$

wobei F die Zielfunktion des dualen Problems bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: (P) ist konvex.

(b) Zeigen Sie, dass $N = \{(u,v)^\top \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0,\ v = 0\}$.

(c) Berechnen Sie $F(u,v)$ für $(u,v)^\top \in N$.

Aufgabe 5 *(12 Punkte)*:

Gegeben sei das Problem: Minimiere $f(x) = -\frac{1}{2}\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ auf

$$M \ := \ \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2\,(1 + x_2 x_3) \ = \ 1\right\}.$$

(a) Ist die Menge M beschränkt?

(b) Bestimmen Sie alle Kuhn-Tucker Punkte (x^*, v^*) des Problems.

(c) Sind für den Kuhn-Tucker Punkt $x = (1,0,0)^\top$ und $v = 1/2$ die notwendigen unf hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnun erfüllt?

Aufgabe 1

Lösung: Sei f zunächst f konvex und $(x_j, y_j) \in K_f$ für $j = 1, 2$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist $y_j \geq f(x_j)$ und daher wegen der Konvexität von f:

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \;\geq\; \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \;\geq\; f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\big)\,.$$

Also ist $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in K_f$.

Sei umgekehrt K_f konvex und $x_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, 2$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist $\big(x_j, f(x_j)\big) \in K_f$ für $j = 1, 2$ und wegen der Konvexität von K_f auch $\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\big) = \lambda\big(x_1, f(x_1)\big) + (1-\lambda)\big(x_2, f(x_2)\big) \in K_f$, d.h.

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \;\geq\; f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\big)\,.$$

Also ist f konvex.

Aufgabe 2

Lösung: Setze $x_1 = u - v$ und fordere $u, v \geq 0$. Dann erhalten wir die Tableaus:

$$\begin{array}{rrrrcrrr|r}
1 & -1 & -2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \boxed{1} & 1 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & -3 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrcrrr|r}
0 & 0 & -1 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
-1 & 1 & 1 & 4 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 11 & \vdots & 3 & 0 & 1 & 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcrrr|r}
0 & 0 & 0 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & -5 & 1 & 8
\end{array}$$

Jetzt sind wir fertig mit Basislösung $(u, v, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 8)$, d.h. $x = (-2, 0, 0)^\top$ ist Lösung mit Optimalwert -2.

Aufgabe 3

Lösung: (a) Mit den Schlupvariablen $x_5, x_6 \geq 0$ erhält man die erste Standardform:

Minimiere $\quad 7x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 21x_4 \quad$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & & & = & \beta\,, \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & & & x_6 & = & 1\,, \end{array} \qquad x_j \geq 0\,,\; j = 1, \dots, 6\,,$$

Das dazu duale Problem liegt in der zweiten Standardform vor:

Maximiere $\beta y_1 + y_2$ unter

$$\begin{array}{rcrcl} & - & y_2 & \leq & 7\,, \\ y_1 & - & 3y_2 & \leq & 12\,, \\ y_1 & - & y_2 & \leq & 2\,, \\ 7y_1 & - & 2y_2 & \leq & 21\,, \\ y_1 & & & \leq & 0\,, \\ & & y_2 & \leq & 0\,. \end{array}$$

Einfacher ist es, $u_j = -y_j$, $j = 1, 2$ zu setzen, d.h.

Maximiere $-\beta u_1 - u_2$ unter

$$\begin{array}{rcrcl} & & u_2 & \leq & 7\,, \\ -u_1 & + & 3u_2 & \leq & 12\,, \\ -u_1 & + & u_2 & \leq & 2\,, \\ -7u_1 & + & 2u_2 & \leq & 21\,, \end{array}$$

und $u_1, u_2 \geq 0$. Der Vektor $-\binom{\beta}{1}$ steht senkrecht auf der Niveaulinie (ist Gerade) der Zielfunktion und zeigt in Richtung des Anstiegs. Lt Skizze ist $\sup(P) = +\infty$ für $\beta < 0$. Für $\beta \geq 0$ ist $(u = (0,0)^\top$ eine Lösung, also $y = (0,0)^\top$.

Aufgabe 4

Lösung: Zu (a): Da g linear und damit konvex ist, muss nur die Konvexität von f gezeigt werden. Hier gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 \geq 0, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} e^{-x_1} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 < 0.$$

Setzt man im besonderen $x_1 = 0$, so sieht man, dass f stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist. Durch weiteres Differenzieren sieht man

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 \geq 0, \qquad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 < 0,$$

d.h. f ist sogar zwei mal stetig differenzierbar mit der Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{|x_1|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\nabla^2 f(x)$ offenbar positiv semi-definit für alle $x \in \mathbb{R}^2$, und es folgt, dass f konvex ist.

Zu (b): Es ist für $u \geq 0,\ v \in \mathbb{R}$

$$F(u,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left[f(x) + ug(x) + v(x_1 - x_2) \right].$$

Sei zunächst $v \neq 0$. Setzen wir $x = (0,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$f(0,t) + ug(0,t) + v(0-t) = 1 - vt \to +\infty \qquad \text{für } t \to +\infty \text{ oder } t \to -\infty,$$

d.h. $F(u,v) = -\infty$. Sei nun umgekehrt $v = 0$. Dann ist

$$f(x) + ug(x) + v(x_1 - x_2) = e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1.$$

diese Funktion hängt nur noch stetig von x_1 ab, und es gilt

$$e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1 \;\to\; +\infty \qquad \text{für } |x| \to \infty,$$

da die Exponentialfunktion schneller als die linearen Terme wächst. Also ist diese Funktion nach unten beschränkt, und damit folgt $F(u,v) > -\infty$.

Zu (c): Sei $(u,v)^\top \in N$, d.h. $u \geq 0$, $v = 0$. Wir müssen damit das infimum der Funktion

$$h_u(x_1) = e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1$$

bestimmen. Da x_2 in dem Funktionsausdruck nicht vorkommt, reicht es, nur $x_1 \in \mathbb{R}$ zu betrachen und das zweite Argument zu vergessen. Es gilt

$$h_u(x_1) = \begin{cases} e^{x_1} + (u-1)x_1 & \text{für } x_1 \geq 0 \\ e^{-x_1} + (u+1)x_1 & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

Für $x_1 > 0$ ist h_u monoton steigend, d.h. das Minimum muss für $x_1 \leq 0$ angenommen werden. Einfache Rechunung liefert für $x_1 \leq 0$:

$$0 = h_u'(x_1) = -e^{-x_1} + (u+1),$$

d.h. für $x_1 = -\ln(u+1)$ haben wir ein Minimum vorliegen. Damit ist

$$F(u,v) = h_u(-\ln(u+1)) = e^{\ln(u+1)} - (u+1)\ln(u+1) = (u+1)(1 - \ln(u+1)).$$

Aufgabe 5

Lösung: (a) M ist unbeschränkt. Setze z.B. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, und x_3 beliebig (groß).

(b) Es ist $h(x) = x_1^2 + 4x_1^2 x_2 x_3 - 1$, also $\nabla f(x) = (-x_1, 2x_2, 2x_3)^\top$ und $\nabla h(x) = (2x_1 + 8x_1x_2x_3, 4x_1^2x_3, 4\,x_1^2x_2)^\top$. Die Bedingungen für Kuhn-Tucker Punkte lauten (wir schreiben x statt x^* und v statt v^*):

$$\begin{array}{llllll} (1) & -x_1 & + & 2v\,x_1(1+4x_2x_3) & = & 0\,, \\ (2) & 2\,x_2 & + & 4v\,x_1^2x_3 & = & 0\,, \\ (3) & 2\,x_3 & + & 4v\,x_1^2x_2 & = & 0\,, \quad \text{und die Restriktion} \quad (4) \quad x_1^2(1+4\,x_2x_3) = 1\,. \end{array}$$

Wegen (4) ist $x_1 \neq 0$. Aus den Gleichungen (1) und (4) folgt nach Kürzen von x_1 und Elimination der Klammer, dass $x_1^2 = 2v$. Insbesondere ist $v > 0$. Multiplikation der 2. Gleichung mit x_2 und der dritten mit x_3 und Subtraktion liefert $x_2^2 = x_3^2$, also $x_2 = \pm x_3$.

1. Fall: $x_2 = x_3$. Die Gleichung (2) reduziert sich zu $2x_2(1 + 2vx_1^2) = 0$ und hieraus $x_2 = 0$. Also auch $x_3 = 0$ und wegen (4) $x_1 = \pm 1$. Aus (1) bekommt man noch $v = 1/2$. Also sind $x^* = (\pm 1, 0, 0)^\top$, $v^* = 1/2$ Kuhn-Tucker Punkte.

2. Fall: $x_2 = -x_3$. Die vier Gleichungen reduzieren sich zu den folgenden:

$$-1 + 2v(1 - 4x_2^2) = 0\,, \quad 2x_2(1 - 2vx_1^2) = 0\,, \quad x_1^2(1 - 4x_2^2) = 1\,.$$

Fall 2a: $x_2 = 0$. Dann ist wieder $x_3 = 0$ und $x_1 = \pm 1$, und wir sind im ersten Fall.

Fall 2b: $x_2 \neq 0$. Dann ist $1 - 2vx_1^2 = 0$, also $x_1^2 = \frac{2}{v}$. Andererseits ist (oben!) $x_1^2 = 2v$. Daher ist $v = 2$ und wieder $x_1 = \pm 1$. Aus (4) mit $x_2 = -x_3$ folgt $x_2 = x_3 = 0$.

Also sind $x^* = (\pm 1, 0, 0)^\top$, $v^* = 1/2$ die einzigen Kuhn-Tucker Punkte.

(c) Die Langegrangefunktion lautet

$$L(x,v) \;=\; -\frac{1}{2}\,x_1^2 \;+\; x_2^2 \;+\; 2x_3^2 \;+\; v\left[x_1^2 \;+\; 4x_1^2x_2x_3 \;-1\right].$$

Der Gradient und die Hesse Matrix sind:

$$\nabla_x L(x,v) \;=\; \begin{pmatrix} -x_1 + 2vx_1 + 8vx_1x_2x_3 \\ 2x_2 + 4vx_1^2x_3 \\ 2x_3 + 4vx_1^2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla_x^2 L(x,v) \;=\; \left(\begin{array}{ccc} -1 + 2v + 8vx_2x_3 & 8vx_1x_3 & 8vx_1x_2 \\ 8vx_1x_3 & 2 & 4vx_1^2 \\ 8vx_1x_2 & 4vx_1^2 & 2 \end{array} \right.$$

An der Stelle $x = x^* = (1,0,0)^\top$ und $v^* = 1/2$ reduziert sich die Hessematrix auf

$$\nabla_x^2 L(x^*, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$z^\top \nabla_x^2 L(x^*,2) z = -2z_1^2 + 2\left[z_2^2 + 2z_2z_3 + z_3^2\right] + 126z_3^2 = -2z_1^2 + 2(z_2+z_3)^2 + 126z_3^2\,.$$

Schließlich ist der Tangentialraum $V = \{z \in \mathbb{R}^3 : \nabla h(x^*)^\top z = 0\} = \{z \in \mathbb{R}^3 : z_1 = 0\}$. Für $z \in V$ ist $z^\top \nabla_x^2 L(x^*,2) z = 2(z_2 + z_3)^2 \geq 0$. Daher ist die notwendige Optimalitätsbedingung 2. Ordnung erfüllt, die hinreichende aber nicht (setze z.B. $z_2 = 1$ und $z_3 = -1$).