Griesmaier
Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit:
Bemerkungen: -

Aufgabe 1:

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Jedes zulässige Optimierungsproblem der Form

$$\text{Min} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad M = \{x \in X \,:\, g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$$

mit $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^\ell$ und $h : X \to \mathbb{R}^m$ besitzt eine Lösung, falls

$$\inf\{f(x) \,:\, x \in M\} > -\infty$$

(b) Ein Reifenhersteller stellt zwei verschiedene Reifen aus unterschiedlichen Gummimischungen her. Für je ein Reifenset des Typs R_1 bzw. R_2 werden unterschiedliche Mengen der Rohstoffe A und B verwendet, von denen pro Monat eine gewisse Maximalkapazität zur Verfügung steht. Beim Verkauf eines Reifensets werden unterschiedliche Gewinne erzielt, die zusammen mit den anderen Daten in folgender Tabelle aufgelistet sind.

	R_1	R_2	Kapazität
Rohstoff A (Mengeneinheiten/Set)	1	2	32
Rohstoff B (Mengeneinheiten/Set)	4	2	60
Gewinn (Euro/Set)	45	30	

Der Reifenhersteller möchte seinen Gewinn maximieren. Formulieren Sie dieses lineare Optimierungsproblem in der Normalform.

Aufgabe 2: Lösen Sie mit Hilfe des Simplex-Verfahrens und der Regel von Bland das lineare Optimierungsproblem

$$\underset{x \in M}{\text{Max}} \; x_1 + x_2,$$

wobei

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + 2x_2 \geq 2,\; 4x_1 + 4x_2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 3: Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \quad \text{Min} \quad x_1 + e^{x_2} \quad \text{unter} \quad 3x_1 - 2e^{x_2} \geq 10 \quad \text{und} \quad x_2 \geq 0$$

(a) Beweisen Sie, dass es sich um ein konvexes Optimierungsproblem handelt.

(b) Zeigen Sie, dass die Slater-Bedingung für (P) erfüllt ist.

(c) Stellen Sie das zu (P) duale Problem (D) auf. Geben Sie die in (D) auftauchende Funktion

$$F(u, v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, u, v)$$

explizit an.

(d) Lösen Sie (D).

Aufgabe 4: Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \quad \text{Min} \quad (x_1-1)^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_3 \quad \text{unter} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 + x_3^2 = 0.$$

(a) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte von (P).

(b) Zeigen Sie mithilfe der notwendigen Optimierungsbedingung 2. Ordnung, dass die Funktion f im Punkt $(0,-1,-1)$ kein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 5:

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wird das Minimum des linearen Optimierungsproblems

$$\text{Min}\, f(x) \quad \text{auf} \quad \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \,:\, Ax = b\}$$

in mehr als einem Eckpunkt angenommen, so wird es auf der konvexen Hülle dieser Eckpunkte angenommen.

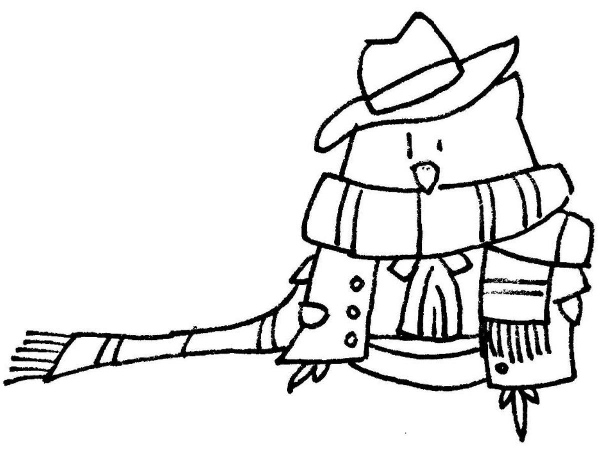
(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Beweisen Sie den folgenden Alternativsatz von Gale: Genau eine der beiden Aussagen

$$\text{(I)} \qquad Ax \leq b \quad \text{hat eine Lösung } x \in \mathbb{R}^n$$

bzw.

$$\text{(II)} \qquad A^\top y = 0, \quad y \geq 0, \quad b^\top y < 0 \quad \text{hat eine Lösung } y \in \mathbb{R}^m$$

ist richtig.



Aufgabe 1:
Lösung:

(a) Die Behauptung ist falsch. Ein Gegenbeispiel liefert die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

(b) Mit x bezeichnen wir die Anzahl der (hergestellten) Reifensets vom Typ R1, mit y die Anzahl der (hergestellten) Reifensets vom Typ R2. Das Optimierungsproblem im $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ lässt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \max_{x,y\in\mathbb{R}^2_{\geq 0}} \quad & 45x + 30y \\ \text{unter} \quad & x + 2y \leq 32, \\ \text{und} \quad & 4x + 2y \leq 60 \end{aligned}$$

Wir schreiben das Maximierungsproblem in ein Minimierungsproblem um und führen die Schlupfvariablen $z_1, z_2 \geq 0$ ein und erhalten das äquivalente lineare Optimierungsproblem in Normalform

$$\begin{aligned} \min_{x,y\in\mathbb{R}^2_{\geq 0}} \quad & -45x - 30y \\ \text{unter} \quad & x + 2y + z_1 = 32, \\ & 4x + 2y + z_2 = 60 \\ \text{und} \quad & z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Lösung: Wir schreiben das Problem

$$\operatorname*{Max}_{x\in M} x_1 + x_2,$$

zunächst um in

$$\operatorname*{Min}_{x\in M} -x_1 - x_2.$$

Wir führen die vorzeichenbeschränkten Variablen $z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$ ein und schreiben

$$x_1 = z_1 - z_2 \quad \text{und} \quad x_2 = z_3 - z_4.$$

Betrachten wir die beiden Bedingungen in der Menge M so haben wir bereits

$$z_1 - z_2 + 2(z_3 - z_4) \geq 2 \quad \text{und} \quad 4(z_1 - z_2) + 4(z_3 - z_4) \leq 1$$

Durch Einführen der Schlupfvariablen $s_1, s_2 \geq 0$ werden diese Bedingungen zu

$$z_1 - z_2 + 2(z_3 - z_4) - s_1 = 2 \quad \text{und} \quad 4(z_1 - z_2) + 4(z_3 - z_4) + s_2 = 1$$

Wir stellen das erste Simplextableau auf.

$$T_1 : \quad \begin{array}{rrrrrr|l} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ \hline 1 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Da wir keine Basislösung ablesen können beginnen wir mit Phase 1 und erstellen hierfür das Simplextableau. Wir benutzen in den folgenden Schritten die Regel von Bland zur Pivotsuche.

$$
T_2: \quad \begin{array}{rrrrrrrr|r}
-5 & 5 & -6 & 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & \gamma - 3 \\
\hline\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \\
\hline
1 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\boxed{4} & -4 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
T_3: \quad \begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1/4 & 0 & 5/4 & \gamma - 7/4 \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & \eta + 1/4 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1/4 & 1 & -1/4 & 7/4 \\
1 & -1 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4
\end{array}
$$

$$
T_4: \quad \begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & \gamma - 3/2 \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & \eta + 1/4 \\
\hline
-1 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 3/2 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4
\end{array}
$$

$$
T_5: \quad \begin{array}{rrrrrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \gamma \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & \eta + 1/4 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 3/2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1/4 & 1 & -1/4 & 7/4
\end{array}
$$

Wir streichen nun die letzten beiden Spalten, sowie die erste Zeile und erhalten

$$
T_6: \quad \begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & \eta + 1/4 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1/4 & 7/4
\end{array}
$$

Wir können die Basislösung $(0, 3/2, 7/4, 0, 0, 0)$ sofort ablesen und erhalten somit für unser ursprüngliches Maximierungsproblem, dass $(x_1, x_2) = (-3/2, 7/4)$ die optimale Lösung mit maximalem Wert $1/4$ ist.

Aufgabe 3:
Lösung:

(a) Wir definieren die Funktion

$$f(x) = x_1 + e^{x_2},$$

sowie die beiden Funktionen

$$h_1(x) = -3x_1 + 2e^{x_2} + 10 \quad \text{und} \quad h_2(x) = -x_2$$

Um zu zeigen, dass es sich um ein konvexes Optimierungsproblem handelt müssen wir nachweisen, dass f, h_1 und h_2 konvex sind. Hierfür leiten wir zwei mal ab und erkennen, dass

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad Dh_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad Dh_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $e^{x_2} > 0$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ sind alle Funktionen konvex. Es handelt sich also um ein konvexes Optimierungsproblem.

(b) Wir bemerken (beispielsweise), dass für den Punkt $x^* = (5, 1)$ die Slater-Bedingung erfüllt ist, da $h_j(x^*) < 0$ ist für $j = 1, 2$.

(c) Wir definieren zunächst die Lagrangefunktion

$$L(x, u_1, u_2) = f(x) + u_1 h_1(x) + u_2 h_2(x) = x_1 + e^{x_2} + u_1(-3x_1 + 2e^{x_2} + 10) + u_2(-x_2),$$

wobei stets $u_1, u_2 \geq 0$ zu beachten ist und betrachten nun

$$F(u_1, u_2) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, u_1, u_2).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\inf_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, u_1, u_2) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} (x_1 + e^{x_2} + u_1(-3x_1 + 2e^{x_2} + 10) - u_2(x_2)) \\ &= \inf_{x_1 \in \mathbb{R}} (x_1 - 3x_1 u_1) + \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} ((1 + 2u_2)e^{x_2} - u_2 x_2) + 10u_1.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass

$$\inf_{x_1 \in \mathbb{R}} (x_1 - 3x_1 u_1) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls} \quad u_1 \neq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{falls} \quad u_1 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Weiterhin liefert eine kurze Kurvendiskussion, dass

$$\inf_{x_2 \in \mathbb{R}} ((1 + 2u_2)e^{x_2} - u_2 x_2) = u_2 - u_2 \log\left(\frac{u_2}{1 + 2u_1}\right)$$

Damit lautet das duale Problem

$$(D) \quad \text{Max} \quad u_2 - u_2 \log\left(\frac{u_2}{1 + 2u_1}\right) + 10u_1 \quad \text{unter} \quad u_1 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad u_2 \geq 0$$

(d) Setzen wir $u_1 = \frac{1}{3}$ in die zu maximierende Funktion ein, so erhalten wir

$$F(u_2) = u_2 - u_2 \log\left(\frac{3u_2}{5}\right) + \frac{10}{3}.$$

Leiten wir diese Funktion ab, so erhalten wir

$$F'(u_2) = -\log\left(\frac{3u_2}{5}\right)$$

und

$$F'(u_2) = 0 \iff u_2 = 5/3.$$

Das Maximum von F wird also am Punkt $(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ angenommen mit

$$F(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = 5.$$

Aufgabe 4:
Lösung:

(a) Um die KKT Punkte von (P) zu bestimmen stellen wir zunächst die Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf mit

$$L(x, v) = (x_1 - 1)^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_3 + v_1(x_1 + x_2 - x_3) + v_2(x_2 + x_3^2).$$

Wir leiten ab und erhalten

$$\nabla_x L(x, v) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) + v_1 \\ -2x_2 + v_1 + v_2 \\ 2x_3 - 4 - v_1 + 2v_2 x_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

sowie

$$\nabla_x^2 L(x, v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 2v_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(Die zweite Ableitung benötigen wir für Teil (b).)
Wir definieren $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und erhalten als Ableitung

$$g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Die 2. constraint qualification ist in jedem Fall erfüllt. Die KKT-Bedingungen lauten nun also

$$\nabla_x L(x, v) = 0 \quad \text{und} \quad g(x) = 0.$$

Anhand von (1) bemerken wir sofort, dass

$$v_1 = -2(x_1 - 1)$$

und daraus, dass

$$v_2 = 2(x_1 - 1) + 2x_2.$$

Setzen wir diese beiden Bedingungen in die dritte Komponente ein, so ergibt sich

$$2x_3 - 4 + 2(x_1 - 1) + 2x_3(2(x_1 - 1) + 2x_2) = 0 \tag{4}$$

Da außerdem $g(x) = 0$ gelten soll erhalten wir des Weiteren die Bedingungen

$$x_2 = -x_3^2 \quad \text{und} \quad x_1 = x_3 + x_3^2.$$

Eingesetzt in (4) also

$$\begin{aligned} 2x_3 - 4 + 2((x_3 + x_3^2) - 1) + 2x_3(2(x_3 + x_3^2 - 1) - 2x_3^2) &= 0 \\ \iff 2x_3 - 4 + 2x_3 + 2x_3^2 - 2 + 4x_3^2 - 4x_3 &= 0 \\ \iff 6x_3^2 - 6 &= 0 \\ \iff x_3 &\in \{1, -1\} \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir die beiden KKT-Punkte $(2, -1, 1, -2, 0)$ und $(0, -1, -1, 2, -4)$.

(b) Wir verwenden $g'(x)$ aus Teil (a) und erhalten nun

$$g'(0, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es ist ersichtlich, dass der Kern von $g'(0, -1, -1)$ gerade vom Vektor $(-1, 2, 1)^\top$ erzeugt wird. Das bedeutet, dass

$$V = \{(-t, 2t, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \, : \, t \in \mathbb{R}\}$$

der in der notwendigen Optimierungsbedingung zweiter Ordnung beschriebene Unterraum ist.

Es ist nun

$$\nabla_x^2 L((0,-1,-1,2,-4)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

und mit $\zeta \in V$

$$\zeta^\top \nabla_x^2 L((0,-1,-1,2,-4))\zeta = -12t^2 < 0.$$

für $t \neq 0$. Damit ist die notwendige Bedingung 2. Ordnung verletzt.

Aufgabe 5:
Lösung:

(a) Es bezeichnen hierfür x_i, $i = 1, \dots, q$ die Eckpunkte der Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \,:\, Ax = b\},$$

an denen das Minimum von f angenommen wird. Wir betrachten nun die konvexe Hülle dieser Menge, also

$$\Lambda(x_1, \dots, x_q) = \left\{ \sum_{i=1}^q \lambda_i x_i \,:\, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, q, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1 \right\}.$$

Mit $x^* \in \Lambda$ und unter Ausnutzung der Linearität von f erhalten wir

$$f(x_1) \leq f(x^*) = f\left(\sum_{i=1}^q \lambda_i^* x_i\right) = \sum_{i=1}^q \lambda_i^* f(x_i) = f(x_1) \sum_{i=1}^q \lambda_i^* = f(x_1).$$

Somit wird das Minimum der Funktion f auf ganz Λ angenommen.

(b) Wir führen zunächst die vorzeichenbeschränkten Variablen $x^+, x^- \geq 0$ ein und schreiben $x = x^+ - x^-$. Indem wir weiterhin die Schlupfvariable $z \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ einführen, finden wir, dass das System $Ax \leq b$ äquivalent ist zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix} = b \tag{5}$$

Das Lemma von Farkas angewandt auf (5) besagt nun, dass entweder (ausschließend) das System (5) oder das System

$$\begin{pmatrix} A^\top \\ -A^\top \\ I \end{pmatrix} y \leq 0 \quad \text{und} \quad b^\top y > 0 \tag{6}$$

eine Lösung hat. Das System (6) ist wiederum äquivalent zum System

$$A^\top y = 0 \quad y \leq 0 \quad b^\top y > 0.$$

Das war zu zeigen.