SS 21 30.07.2021

# Wieners
# Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: keine Bestanden mit: 24,5 P.

**Aufgabe 1** (Ein lineares Programm) **2+2+3+3=10 Punkte**

Betrachten Sie zu $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$ und $c \in \mathbb{R}^N$ das lineare Programm in Standardform

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon Ax = b,\, x \geq 0\right\}.$$

a) Formulieren Sie das duale Problem $(D)$ zu $(P)$.

b) Formulieren und zeigen Sie den schwachen Dualitätssatz linearer Programme.

Gegeben sei nun das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}) \quad & \text{Minimiere} \quad 2x_1 + x_2 \quad \text{unter} \\ & x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 2, \quad x_1 + x_2 \geq -3.\end{aligned}$$

c) Bringen Sie das Optimierungsproblem $(\widetilde{P})$ auf die Standardform.
Geben Sie $A$, $b$ und $c$ explizt an.

d) Zeigen Sie, dass das duale Problem zu $(\widetilde{P})$ nicht zulässig ist.

**Aufgabe 2** (Kurzaufgaben) **2+2+4=8 Punkte**

a) Formulieren Sie den Trennungssatz für konvexe Mengen.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen

$$\mathcal{V} = \mathrm{affine}\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathcal{C} = \mathrm{cone}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

c) Formulieren Sie den Max-Flow-Min-Cut Satz. Definieren Sie den Wert des Flusses, die Flusserhaltung, den Schnitt und den Graphen.

**Aufgabe 3** (Rezessionskegel) **2+1+1+2.5+3.5=10 Punkte**

Ein Rezessionskegel zu einer Menge $\mathcal{M}$ ist die Menge aller freien Richtungen

$$\mathcal{C}^\infty := \left\{u \in \mathbb{R}^N : \exists x \in \mathcal{M}, \text{ so dass } x + tu \in \mathcal{M} \text{ für alle } t \geq 0\right\}.$$

a) Skizzieren Sie den Rezessionskegel zur Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$2 \geq x_1 - x_2, \quad x_2 \geq 0, \quad 2x_1 \geq x_2$$

und die Menge selbst.

b) Zeigen Sie, dass der Rezessionskegel ein Kegel ist.

c) Sei $\mathcal{M}$ ein Polytop. Bestimmen Sie den zugehörigen Rezessionskegel $\mathcal{C}^\infty$.

d) Zeigen Sie, dass der Rezessionskegel $\mathcal{C}^\infty$ konvex ist, falls $\mathcal{M}$ konvex ist.

e) Zeigen Sie, dass der Rezessionskegel eines Polyeders $\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : Ax \leq b\right\}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{C}^\infty = \left\{u \in \mathbb{R}^N : Au \leq 0\right\}.$$

*Hinweis: Verwenden Sie einen Teilmengenbeweis.*

**Aufgabe 4** (Das Simplex-Verfahren) **3+1+6=10 Punkte**

Betrachten Sie zu $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$ sowie $c \in \mathbb{R}^N$ das lineare Programm

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} := \left\{x \in \mathbb{R}^N : Ax \leq b, x \geq 0\right\}.$$

a) Formulieren Sie das Hilfsproblem $(P_I)$ des Simplex-Verfahrens zum Finden einer zulässigen Basislösung von $(P)$.

*Hinweis: Beachten Sie die Schlupfvariablen.*

b) Geben Sie eine zulässige Basislösung des Hilfsproblems an.

Sei nun konkret

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

c) Lösen Sie das konkrete Beispiel mit dem Simplex-Verfahren. Geben Sie hierbei in jedem Schritt die Basislösung und den Funktionswert der Lösung an.

**Aufgabe 5** (Ein konvexes Optimierungsproblem) **4+2+3=9 Punkte**

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) = \ln\left(\sum_{n=1}^{N} \exp(x_n)\right) \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon \sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq 1\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(P)$ ein konvexes Optimierungsproblem ist.

*Hinweis: Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |u_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |v_n|^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

*und eine geeignete Substitution.*

b) Zeigen Sie, dass die Slater-Bedingungen erfüllt sind.

c) Bestimmen Sie das lineare Programm

$$(LP) \quad \text{Minimiere} \quad c^\top x + \gamma \quad \text{auf} \quad \mathcal{M},$$

so dass $f(x) \geq c^\top x + \gamma$ für alle $x \in \mathcal{M}$, wobei $\gamma$ maximal sein soll.

*Hinweis: Verwenden Sie, dass für eine konkave Funktion $h$*

$$h\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \lambda_n h(x_n), \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1, \quad \lambda_n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N,$$

*gilt. Eine Funktion $h$ heißt konkav, wenn $-h$ konvex ist.*

**Aufgabe 6** (Ein differenzierbares Optimierungsproblem) **1+4+3+2=10 Punkte**

Gegeben sei das Optimierungsproblem in $\mathbb{R}^2$

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x_1^2\right) \quad \text{unter} \quad 1 - x_1^2 \geq x_2 \quad \text{und} \quad x_1^2 - 1 = x_2.$$

a) Skizzieren Sie die zulässige Menge.

b) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte des Problems $(P)$.

c) Zeigen Sie, dass die KKT-Punkte der (CQ2) Bedingung genügen.

d) Zeigen Sie für die KKT-Punkte, dass die notwendige Bedingung 2. Ordnung erfüllt ist.