

Frank
Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: keine Bestanden mit: 30 P.
Bemerkungen: -

Aufgabe 1 (Simplex) $3 + 3 + 9 = 15$ Punkte

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 & (P_1) \\ \text{unter} \quad & 2x_1 \leq 4 \\ & -x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- (a) Formulieren Sie (P_1) in Standardform um.
- (b) Geben Sie eine zulässige Basislösung zu (P_1) an und zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung genannten Eigenschaften, dass mit dieser Lösung die zweite Phase des Simplex-Verfahrens direkt begonnen werden kann.
(Sie können dabei annehmen, dass (E4) $c^\top x = c_N^\top x - c_N^\top z$ für alle $x \in M_N$ gilt.)
- (c) Geben Sie das Starttableau an und führen Sie zwei Schritte des Simplex-Verfahrens durch. Verwenden Sie dabei zum Pivolisieren die Regel von Bland.
Ist das Problem nach den zwei Schritten gelöst? Begründen Sie kurz und geben Sie gegebenenfalls den optimalen Punkt sowie den zugehörigen optimalen Wert an.

Aufgabe 2 (Dualität bei linearen Problemen) $3 + 3 = 6$ Punkte

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 & (P_2) \\ \text{unter} \quad & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie das zu (P_2) duale Problem (D_2) .
- (b) Überprüfen Sie ohne Verwendung des Simplex-Verfahrens die Lösbarkeit von (P_2) und (D_2) .

Aufgabe 3 (Dualität und Slaterbedingung) $4.5 + 3 + 9.5 = 17$ Punkte

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min \quad -2\sqrt{x} - y \quad \text{auf} \quad M = \{(x, y) \in K = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} : x + 5y^2 \leq 10\} \quad (P_3)$$

Das duale Problem zu (P_3) werde mit (D_3) bezeichnet.

- (a) Ist die Slaterbedingung für das Problem (P_3) erfüllt?
- (b) Erwarten Sie eine Dualitätslücke, d.h. $\min(P_3) > \max(D_3)$?
- (c) Bestimmen Sie das duale Problem (D_3) zu (P_3) explizit.

Aufgabe 4 (Konvexe Funktionen) $5 + 4 = 9$ Punkte

Seien $f_1, f_2, \dots, f_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktionen.

- (a) Zeigen Sie, dass $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \max_{i=1, \dots, n} f_i(x)$$

konvex ist.

- (b) Ist die Funktion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \min_{i=1, \dots, n} f_i(x)$$

konvex? Beweisen Sie oder widerlegen Sie mittels eines Gegenbeispiels.

Aufgabe 5 (Differenzierbare Optimierungsprobleme) $1.5 + 8.5 + 2 + 2 = 14$ Punkte

Gegeben sei das differenzierbare Optimierungsproblem

$$\min f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x_1^2\right) \quad \text{auf} \quad M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 \leq -x_2, x_1^2 = x_2 + 2\} \quad (\text{P}_4)$$

- (a) Skizzieren Sie die zulässige Menge.
(b) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte des Problems (P_4).

zur Selbstkontrolle: bei korrektem Lösungsweg erhalten Sie die KKT-Punkte

$$\left((0, -2)^\top, 0, 0\right)^\top, \left((1, -1)^\top, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)^\top \quad \text{und} \quad \left((-1, -1)^\top, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)^\top.$$

- (c) Zeigen Sie für $\left((0, -2)^\top, 0, 0\right)^\top$, dass die (CQ2)-Bedingung erfüllt ist.
(d) Zeigen Sie für $\left((0, -2)^\top, 0, 0\right)^\top$, dass die notwendige Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

Aufgabe 6 (Support Vector Machines) $2.5 + 3 + 9.5 = 15$ Punkte

Es sei der folgende Datensatz gegeben:

$$\text{Klasse } -1: \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{Klasse } +1: \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Zeichnen Sie die Stichprobenelemente aus beiden Klassen in ein Koordinatensystem ein, markieren Sie die Stützvektoren und skizzieren Sie die Entscheidungsgrenzen sowie die optimale Hyperebene für einen linearen SVM-Klassifikator mit maximalem Spielraum (Margin) für diesen Datensatz.
(b) Formulieren Sie das (allgemeine) primale Optimierungsproblem und erläutern Sie kurz die darin auftretenden Größen \mathbf{w} , b , t_n und \mathbf{x}_n .
(c) Berechnen Sie die Parameter des Klassifikators und überprüfen Sie deren Richtigkeit anhand der in (a) gewählten Stützvektoren sowie der optimalen Hyperebene.