Arens
Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: ? P.
Bemerkungen:

Aufgabe 1

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen, so besitzt das Problem

$$\text{(P)} \qquad \operatorname*{Min}_{x \in M} f(x)$$

eine Lösung.

(b) Eine Brauerei kann durch Mischung von zwei Hopfensorten Biere in drei verschiedenen Geschmacksrichtungen brauen. Die unten stehende Tabelle gibt dabei an, wieviele Mengeneinheiten (ME) jeder Hopfensorte zu vewenden sind, um eine ME einer Biersorte zu produzieren. Außerdem ist die zur Verfügung stehende Menge an ME jeder Hopfensorte und der Gewinn pro ME jeder Biersorte angegeben. Insgesamt sollen mindestens 20 ME Bier produziert werden.

	ME Hopfen 1	ME Hopfen 2	Gewinn pro ME
Bier 1	1	2	12
Bier 2	3	1	20
Bier 3	1	3	18
verfügbar (ME)	30	40	

Die Brauerei versucht ihren Gewinn zu maximieren. Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem in Normalform.

Aufgabe 2 Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplex-Verfahrens:

$$\operatorname*{Max}_{x \in M} x_2 - x_1 \qquad \text{auf} \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 \geq 2 \,,\; x_1 \geq 0 \,,\; x_1 + x_2 \leq 3 \right\}.$$

Aufgabe 3 Gegeben ist das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \quad \operatorname*{Min}_{x \in M} f(x) = \mathrm{e}^{2x_1} + (x_2 - 1)^2 \qquad \text{auf} \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 - \mathrm{e}^{-x_1} \geq 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um ein konvexes Optimierungsproblem handelt.

(b) Stellen Sie das zu (P) duale Problem auf, wobei die Zielfunktion explizit zu bestimmen ist.

(c) Lösen Sie das duale Problem.

(d) Begründen Sie, das $\widehat{x} = (0, 2)^\top$ Lösung des Problems (P) ist.

Aufgabe 4 Gegeben ist das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad \operatorname*{Min}_{x \in M} f(x) = (x_1 - 6)^2 + x_2^2 \qquad \text{auf} \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (4 - x_1)\, x_2^2 \geq x_1^3 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $x \in M$, für die die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFB) erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte für das Optimierungsproblem.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen von (P) und den zugehörigen Zielfunktionswert.

Aufgabe 5 Mit $e^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, bezeichnen wir die Koordinateneinheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$. Es sei $Q = \operatorname{cone}\{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus Q$.

Ferner gegeben sei die Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $a_{jk} \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ay \leq 0$ und $b^\top y > 0$.

(b) Geben Sie einen abgeschlossenen Halbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \geq 0\}$ an, so dass $b \notin H$ und $Q \subseteq H$ gilt.

Aufgabe 1

Lösung: (a) Betrachte $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{R}$. f ist strikt konvex, M ist konvex und abgeschlossen, aber f nimmt auf M kein Minimum an. Somit ist die Aussage falsch.

(b) Bezeichne mit $x_j \geq 0$ die Menge in ME an Bier der Sorte j, die produziert wird. Dann ist

$$f(x) = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3$$

zu maximieren. Die Restriktionen sind:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30\,, \qquad 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 40\,, \qquad x_1 + x_2 + x_3 \geq 20\,.$$

Um das Optimierungsproblem in Normalform zu formulieren, führen wir Schlupfvariablen x_4, x_5, $x_6 \geq 0$ ein. Damit formulieren wir das Problem äquivalent als

$$\operatorname*{Min}_{x\in M} -12x_1 - 20x_2 - 18x_3 \qquad \text{auf} \qquad M = \left\{ x \in \mathbb{R}^6_{\geq 0} : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2

Lösung: Zunächst formulieren wir das Problem in Normalform. Dazu substituieren wir $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 - y_3$ mit $y_1, \ldots, y_3 \geq 0$ und führen Schlupfvariablen y_4, $y_5 \geq 0$ ein und erhalten:

$$\operatorname*{Min}_{y\in M} y_1 - y_2 + y_3 \qquad \text{auf} \quad M = \left\{ y \in \mathbb{R}^5_{\geq 0} : \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Es ist keine zulässige Basislösung ablesbar, daher starten wir das Simplex-Verfahren mit Phase I:

$$\text{(T0)} \quad \begin{array}{ccccccc|c} -3 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & \gamma - 5 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \\ \hline \boxed{2} & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ & & & & & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

$$\text{(T2)} \quad \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & \gamma - 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \eta + 2 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & \uparrow & & & & & \uparrow & \end{array}$$

$$\text{(T1)} \quad \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 0 & \gamma - 2 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \eta - 1 \\ \hline 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \uparrow & & & & & & \uparrow & \end{array}$$

$$\text{(T3)} \quad \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \gamma \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \eta + 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ & \uparrow & & \uparrow & & & & \end{array}$$

Phase I ist damit beendet und liefert die zulässige Basislösung $\widehat{y} = (0, 3, 0, 1, 0)^\top$. Nach Streichen der zwei letzten Spalten des Tableaus beginnt im Prinzip die Phase II, doch der Kostenvektor hat keine negativen Einträge mehr. Daher bricht auch Phase II ab und $\widehat{y}$ ist Lösung des Optimierungsroblems in Normalform. Nach Resubstitution erhalten wir die Lösung $\widehat{x} = (0, 3)^\top \in \mathbb{R}^2$ des ursprünglichen Problems mit dem optimalen Zielfunktionswert $f(\widehat{x}) = 3$.

Aufgabe 3

Lösung: (a) Die Hesse-Matrix der Funktion f lautet

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^{2x_1} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und ist daher positiv definit. Somit ist die Zielfunktion konvex.

Die Restriktion lautet $h(x) \leq 0$ mit $h(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x_1} - x_2$. Die Hesse-Matrix von h ist

$$\nabla^2 h(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

diese Funktion ist daher ebenfalls konvex. Insgesamt handelt es sich also um ein konvexes Optimierungsproblem.

(b) Die Lagrange-Funktion zu (P) ist

$$L(x,u) = \mathrm{e}^{2x_1} + (x_2-1)^2 + u\,(1 + \mathrm{e}^{-x_1} - x_2).$$

Um die Zielfunktion des dualen Problems explizit zu bestimmen, müssen wir herausfinden, für welche $u \geq 0$ das Infimum bzgl. $x \in \mathbb{R}^2$ von $L(x,u)$ existiert. Die Ausdrücke

$$\mathrm{e}^{2x_1} + u\mathrm{e}^{-x_1} \qquad \text{und} \qquad (x_2-1)^2 - ux_2$$

sind aber für jedes $u \geq 0$ stetig. Elementare Überlegungen liefern

$$\lim_{|x_1|\to\infty} \left(\mathrm{e}^{2x_1} + u\mathrm{e}^{-x_1}\right) = \infty, \qquad \lim_{|x_2|\to\infty} (x_2-1)^2 - ux_2 = \infty$$

für $u > 0$. Also sind für solche u beide Ausdrücke nach unten beschränkt und nehmen ihr Minimum an einer Stelle an, in der ihre Ableitung verschwindet. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(\mathrm{e}^{2x_1} + u\,\mathrm{e}^{-x_1}\right) = 2\,\mathrm{e}^{2x_1} - u\,\mathrm{e}^{-x_1} && \Longrightarrow && x_1 = \frac{1}{3}\log\frac{u}{2}, \\ 0 &\overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\left((x_2-1)^2 - ux_2\right) = 2x_2 - 2 - u && \Longrightarrow && x_2 = 1 + \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^2} L(x,0) = 0$. Insgesamt erhalten wir

$$F(u) = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} L(x,u) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ 3\left(\frac{u}{2}\right)^{2/3} - \left(\frac{u}{2}\right)^2, & u > 0. \end{cases}$$

Das duale Problem zu (P) lautet $\operatorname*{Max}\limits_{u\geq 0} F(u)$.

(c) Wir suchen nache einer Stelle $u > 0$ mit $F'(u) = 0$. Es ist

$$F'(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^{-1/3} - \frac{u}{2} \overset{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = 2.$$

Da $F(2) = 2 > 0 = F(0)$ und $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = -\infty$ ist, nimmt F and der Stelle $\widehat{u} = 2$ sein Maximum auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ an.

(d) Es ist $h(\widehat{x}) = 0$ und daher $\widehat{x} \in M$. Ferner ist $f(\widehat{x}) = 1 + (2-1)^2 = 2 = F(\widehat{u})$. Nach dem schwachen Dualitätssatz ist $\widehat{x}$ Lösung von (P).

Aufgabe 4

Lösung: (a) Wir schreiben M in der Form

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) \leq 0\} \qquad \text{mit} \qquad h(x) = x_1^3 - (4 - x_1)\, x_2^2\,, \quad x \in \mathbb{R}^2\,.$$

Dann ist die (MFB) in x erfüllt, falls ein $z \in \mathbb{R}^2$ existiert mit $h(x) + h'(x)\,z < 0$. Es ist $h'(x) = (3x_1^2, -2\,(4 - x_1)\,x_2)$, und somit lautet die Bedingung

$$x_1^3 - (4 - x_1)\,x_2^2 + 3\,z_1\,x_1^2 - 2\,z_2\,(4 - x_1)\,x_2 \overset{!}{<} 0\,,$$

bzw.

$$x_1^2\,(x_1 + 3\,z_1) - x_2\,(4 - x_1)\,(x_2 + 2\,z_2) \overset{!}{<} 0\,.$$

Man erkennt sofort, dass die Bedingung für $x = 0$ nicht erfüllt werden kann, aber $h(0) = 0$. Somit ist die (MFB) in $0 \in M$ nicht erfüllt.

Sei nun $x \in M \setminus \{0\}$. Dann ist $x_1 < 4$, denn $h(x) > 0$ für $x_1 \geq 4$. Somit ist also mindestens eine der Zahlen x_1^2 und $x_2\,(4 - x_1)$ von null verschieden. Ist $x_1^2 \neq 0$, setze $z_1 = -|x_1|$. Ist $x_2 \neq 0$, so setze $x_2 = -|z_2|$. Dann ist einer der beiden Summanden auf der linken Seite der Ungleichung echt kleiner null, der ander zumindest kleiner gleich null. Die (MFB) ist erfüllt.

(b) Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x_1, x_2, u) = (x_1 - 6)^2 + x_2^2 + u\,(x_1^3 - (4 - x_1)\,x_2^2)\,.$$

Jeder KKT-Punkt $(x, u) \in M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad 0 \overset{!}{=} \partial_{x_1} L(x_1, x_2, u) = 2\,(x_1 - 6) + u\,(3\,x_1^2 + x_2^2)\,,\\
&(2) \qquad 0 \overset{!}{=} \partial_{x_2} L(x_1, x_2, u) = 2\,x_2 - 2\,u\,(4 - x_1)\,x_2\,,\\
&(3) \qquad 0 \overset{!}{=} u\,h(x) = u\,(x_1^3 - (4 - x_1)\,x_2^2)\,.
\end{aligned}$$

Ist $u = 0$, so folgt aus (1), (2) sofort $x = (6, 0)^\top$, aber dieser Punkt liegt nicht in M. Somit ist $u > 0$.

Als nächstes betrachten wir $x_2 = 0$. Mit (3) ergibt sich dann $x_1 = 0$, was zu einem Widerspruch mit (1) führt.

Also ist $x_2 \neq 0$ und wir erhalten aus (2) die GLeichung $u = 1/(4 - x_1)$. Diese setzen wir in (1) ein. Dies ergibt

$$(4) \qquad 0 \overset{!}{=} 2\,(x_1 - 6)\,(4 - x_1) + 3x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 20x_1 - 48 + x_2^2\,.$$

Wir multiplizieren (4) mit dem Faktor $4 - x_1$ und setzen den Ausdruck aus (3) ein:

$$\begin{aligned}
0 &= (x_1^2 + 20x_1 - 48)\,(4 - x_1) + x_1^3 = 4x_1^2 + 80x_1 - 192 - x_1^3 - 20x_1^2 + 48x_1 + x_1^3\\
&= -16x_1^2 + 128x_1 - 192 = -16\,(x_1 - 4)^2 + 64\,.
\end{aligned}$$

Dies impliziert $x_1 = 2$ oder $x_1 = 6$. Oben hatten wir schon $x_1 < 4$ festgestellt, also kommt nur $x_1 = 2$ in Frage. Damit ergibt sich $x_2 = \pm 2$ und $u = 1/2$.

Damit lauten die KKT-Punkte $((2, 2), 1/2)$ und $((2, -2), 1/2)$.

(c) Mögliche Lösungspunkte des Optimierungsproblems sind KKT-Punkte und alle Punkte, in denen die (MFB) nicht erfüllt ist. Es gilt

$$f(0, 0) = 36\,, \qquad f(2, 2) = f(2, -2) = 20\,.$$

Damit sind $x^{(1)} = (2, 2)^\top$ und $x^{(2)} = (2, -2)^\top$ die Lösungen des Optimierungsproblems mit Zielfunktionswert 20.

Aufgabe 5

Lösung: (a) Zunächst zeigen wir, dass der Vektor b eine negative Koordinate besitzt. Nach Definition ist

$$Q = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{(j)} : \lambda_j \geq 0 \right\} = \mathbb{R}^n_{\geq 0} \,.$$

Da $b \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, existiert ein $\mu \in \{1, \dots, n\}$ mit $b_\mu < 0$.

Der zweite Schritt besteht darin zu zeigen, dass das lineare Gleichungssystem $A^\top x = b$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ besitzt. Da alle Koeffizienten von A nicht-negativ sind, ist nämlich $A^\top x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$. Wie eben gezeigt, ist aber $b \notin \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Somit ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} : A^\top x = b\}$ leer.

Die Behauptung folgt nun aus dem Farkas-Lemma. Es besagt, dass die Menge $\{y \in \mathbb{R}^n : Ay < 0\,,\ b^\top > 0\}$ nicht leer ist, und dies ist ist gleichbedeutend mit der Existenz des geforderten y.

(b) Zunächst nehmen wir an, dass $b \in \mathbb{R}^n_{\leq 0}$. Da $b \notin Q$, ist $b \neq 0$. In diesem Fall wählen wir $a = -b \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \setminus \{0\}$. Dann folgt direkt $a^\top b = -|b|^2 < 0$ und $a^\top x = -b^\top x \geq 0$ für alle $x \geq 0$.

Ist dies nicht der Fall, so existiert ein Index ν mit $b_\nu > 0$. Setze $a_\nu = -b_\mu/2$, $a_\mu = b_\nu$ und $a_k = 0$ sonst. Es folgt

$$a^\top b = -\frac{b_\mu b_\nu}{2} + b_\nu b_\mu = \frac{b_\mu\, b_\nu}{2} < 0\,, \qquad \text{also } b \notin H\,,$$

und für $x \geq 0$

$$a^\top x = -\frac{b_\mu}{2} x_\nu + b_\nu x_\mu \geq 0\,, \qquad \text{also } x \in H\,.$$