

Wieners
Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: keine

Aufgabe 1 (Differenzierbare Optimierung)

7 = 1+2+4 Punkte

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min. x_3^2 \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leq 0\}. \quad (\text{P})$$

- Zeigen Sie, dass (P) ein konvexes Problem ist.
- Zeigen Sie, dass $((0, 0, 0), 0)$ ein KKT-Punkt von (P) ist.
- Zeigen Sie, dass das duale Problem zu (P) durch (D) gegeben ist.

$$\max. \frac{-u^2}{4} \quad \text{auf} \quad [0, \infty) \quad (\text{D})$$

Aufgabe 2 (Quadratische Probleme)

4 = 1.5+2.5 Punkte

Zu $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$, $c \in \mathbb{R}^N$ betrachten Sie die Optimierungsaufgabe (QP).

$$\min. \frac{1}{2} x^\top Q x + c^\top x \quad \text{unter} \quad x \in \mathcal{M}, \quad (\text{QP})$$

mit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$. Ferner sei $b \in \mathbb{R}^K$ fest.

- Sei $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax \leq b\}$ und $x^+ \in \mathcal{M}$ eine Lösung von (QP).
Nennen Sie die Aussage des Satzes von Kuhn-Tucker in diesem Fall.
- Sei nun $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax = b\}$. Zeigen Sie:

$$x \in \mathbb{R}^N \text{ löst (QP)} \quad \implies \quad \exists u \in \mathbb{R}^K : \begin{pmatrix} Q & A^\top \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwenden Sie a).

Aufgabe 3 (Slater vs. (CQ1))

5 = 1+1+3 Punkte

Seien $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^P$ konvex, sowie $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ und $b \in \mathbb{R}^K$.
Wir betrachten das Problem:

$$\min. f(x) \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : g(x) \leq 0, Ax = b\} \quad (\text{KP})$$

Ferner seien f und g stetig differenzierbar und $x^* \in \mathcal{M}$ ein lokales Minimum von (KP).

- Geben Sie die Slater-Bedingung (SB) für (KP) an.
- Geben Sie die Constraint-Qualification (CQ1) für (KP) in x^* an.
- Zeigen Sie: Die Slater-Bedingung (SB) aus a) impliziert (CQ1) aus b).

Aufgabe 4 (Dualität linearer Probleme)

4.5 = 1.5+3 Punkte

Seien $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$, $c \in \mathbb{R}^N$ und $b \in \mathbb{R}^K$ gegeben.

a) Betrachten Sie die folgenden linearen Probleme.

$$\min. c^\top x \quad \text{unter} \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (\text{P})$$

$$\max. b^\top y \quad \text{unter} \quad A^\top y \leq c, \quad (\text{D})$$

Formulieren Sie die drei Implikationen des starken Dualitätssatzes für Probleme wie (P) und (D).

b) Sei nun $N = K$ und A invertierbar. Zeigen Sie mithilfe des Dualitätssatzes:

(i) (D) ist genau dann lösbar, wenn $A^{-1}b \geq 0$.

(ii) Ist (D) lösbar, so gilt $\max(\text{D}) = c^\top A^{-1}b$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie viele Elemente die zulässige Menge von (P) maximal enthält.

Aufgabe 5 (Das Simplex-Verfahren)

9 = 6+3 Punkte

a) Lösen Sie das folgende Problem mithilfe des Simplex-Algorithmus:

$$\min. c^\top x \quad \text{unter} \quad x \in \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Geben Sie den minimalen Zielfunktionalwert und eine Minimalstelle an.

Dabei seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$, $c \in \mathbb{R}^N$ und $b \in \mathbb{R}^K$ gegeben und betrachten Sie das folgende Problem:

$$\min. c^\top x \quad \text{unter} \quad x \in \mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax = b, x \geq 0\} \quad (\text{P})$$

Nehmen Sie an, dass Sie über ein Computer-Programm (PRG) verfügen, mit dem Sie lineare Probleme in der Form von (P) durch Phase II des Simplex-Algorithmus lösen können, falls eine zulässige Basislösung bekannt ist.

Geben Sie unter Verwendung des Programms (PRG) ein Verfahren an, mit dem Sie eine solche zulässige Basislösung für (P) konstruieren können, indem Sie ein geeignetes Ersatzproblem betrachten.

Aufgabe 6 (Flussprobleme)

6 = 3+3 Punkte

Sei $C = (c_{kn}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die Kapazitätsmatrix eines Graphen mit Knoten $1, \dots, N$, sodass $c_{kn} \geq 0$ für alle $k, n \in \{1, \dots, N\}$ gilt.

a) Geben Sie das Max-Flow-Min-Cut-Theorem für ein Flussproblem im Graphen zu C an und definieren Sie die auftretenden Begriffe.

b) Verwenden Sie das Max-Flow-Min-Cut-Theorem, um den maximalen Wert eines Flusses im Graphen aus Abbildung 1 zu bestimmen.

Geben Sie außerdem einen Fluss X an, der das Maximum realisiert.

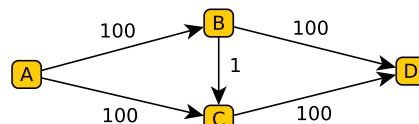


Abbildung 1: Ein Graph mit vier Knoten von der Quelle A zu Senke D.