



Kirsch
Optimierungstheorie

Lösung: offiziell

Bestanden mit: 17 P.

Aufgabe 1 (8 Punkte): Es sei das folgende lineare Optimierungsproblem gegeben:

Minimiere $f(x) = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 - 6x_4$, $x \in \mathbb{R}^4$, unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 &\geq 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\geq 1, \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Stellen Sie das duale Problem auf und bestimmen Sie alle Lösungen des dualen Problems graphisch

Aufgabe 2 (10 Punkte): Bestimmen Sie genau die $\beta \geq 2$, für die das folgende System (mindestens) eine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= \beta, \\ 2x_2 - 5x_3 &\leq 4, \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Geben Sie für jedes dieser β eine Lösung an.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 - 4xy - 2x + 4y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ zwei Parameter sind.

- (a) Bestimmen Sie genau alle $a, b \in \mathbb{R}$, so dass f konvex ist.
- (b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $(x, y) = (1, 1)$ ein lokales Minimum von f im \mathbb{R}^2 ?

Aufgabe 4 (12 Punkte): Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit vollem Rang $m \leq n$. Es sei $c \in \mathbb{R}^n$ nicht im Wertebereich von A^\top . Gegeben sei das Problem

$$\text{Minimiere } c^\top x \quad \text{unter } x^\top Bx \leq 1, \quad Ax = 0.$$

- (a) Zeigen Sie die Existenz einer Minimalstelle x^* .
- (b) Begründen Sie, weshalb $AB^{-1}A^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulär ist.
- (c) Zeigen Sie die Existenz eines $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \alpha(Pc - B^{-1}c)$, wobei $P = B^{-1}A^\top(AB^{-1}A^\top)^{-1}AB^{-1}$. Ist $x^* = 0$?
- (d) Bestimmen Sie die Konstante α in (c) und damit x^* .

Aufgabe 5 (12 Punkte): Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3$, $x \in \mathbb{R}^3$, und die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 1, \quad x_1, x_2, x_3 > 0\}.$$

- (a) Ist M abgeschlossen? Ist M beschränkt?
- (b) Existieren globale Minimal- oder Maximalstellen von f auf M ?
- (c) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen von f auf M .

Lösung zu Aufgabe 1

Um das Problem auf Normalform zu bringen, führen wir die Schlupfvariablen $x_5, x_6 \geq 0$ ein und erhalten das Problem: Minimiere $c^\top x$ unter $Ax = b, x \geq 0$, wobei $x = (x_1, \dots, x_6)^\top \in \mathbb{R}^6$, $c = (4, 12, 3, -6, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^6$, $b = (2, 1)^\top \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$.

Das duale Problem ist: Maximiere $b^\top y$ unter $A^\top y \leq b, y \in \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\begin{aligned} & -y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 12 \\ & -5y_1 + 3y_2 \leq 3 \\ & -2y_1 - y_2 \leq -6 \end{aligned} \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Maximiere $2y_1 + y_2$ unter

Auf das karierte Paper zeichnet man neben den Halbebenen auch die Gerade $2y_1 + y_2 = \gamma$ für verschiedene Parameter γ ein und erkennt, dass diese Gerade parallel zu der Gerade ist, die die 2. und 4. Halbebene begrenzt. Man erkennt, dass alle Punkte auf der Strecke zwischen $(6, 0)^\top$ und $(4, 4)^\top$ Lösungen sind mit Maximalwert 12.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir wollen Phase I des Simplexverfahrens anwenden und brauchen dafür nur den Defekt in den beiden Gleichungen zu minimieren, d.h.

Minimiere $[1 - (x_1 + x_2 - 2x_3)] + [\beta - (2x_1 + 3x_2 - 5x_3)]$ unter

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq \beta, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \\ 2x_2 - 5x_3 &\leq 4, \end{aligned}$$

Einführung von Schlupfvariablen $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ liefert das Starttableau

$$\begin{array}{cccccc|c} -3 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1 - \beta \\ \hline 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Als Pivotspalte wählen wir die Spalte 1 (wegen der 0 in der Spalte), als Pivotzeile müssen wir eine wählen mit minimalem Quotienten. Wegen $1/1 \leq \beta/2$ können wir $a_{11} = 1$ als Pivotelement wählen. Leerräumen der ersten Spalte liefert das Tableau

$$(*) \quad \begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 - \beta \\ \hline 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & \beta - 2 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Jetzt müssen wir Spalte 2 als Pivotspalte wählen und müssen die Quotienten $1/1$ und $(\beta - 2)/1$ vergleichen.

1. Fall: $\beta \geq 3$. Dann ist $(\beta - 2)/1 \geq 1/1$ und wir wählen Zeile 1 als Pivotzeile, d.h. $a_{12} = 1$ als Pivotelement. Leerräumen der zweiten Spalte liefert das Tableau

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 3 - \beta \\ \hline 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \beta - 3 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Jetzt müssen wir $a_{23} = 1$ als Pivotelement wählen. Leerräumen der dritten Spalte liefert das Tableau

$$\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -5 & 2 & 0 & 2\beta - 5 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \beta - 3 \\ -3 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & \beta - 1 \end{array}$$

Damit sind wir fertig und es ergibt sich nach Abschneiden der Schlupfvariablen der zulässige Vektor $x = (0, 2\beta - 5, \beta - 3)^\top$.

2. Fall: $2 \leq \beta < 3$. Dann ist $(\beta - 2)/1 < 1/1$ und wir wählen (im Tableau (*)) Zeile 2 als Pivotzeile, d.h. $a_{22} = 1$ als Pivotelement. Leerräumen der zweiten Spalte liefert das Tableau

$$\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 - \beta \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 8 - 2\beta \end{array}$$

Damit sind wir fertig und es ergibt sich nach Abschneiden der Schlupfvariablen der zulässige Vektor $x = (3 - \beta, \beta - 2, 0)^\top$.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Wir stellen den Gradienten und die Hesse-Matrix auf:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2ax - 4y - 2 \\ 2by - 4x + 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & -4 \\ -4 & 2b \end{pmatrix}.$$

Die Funktion ist konvex, wenn $\nabla^2 f$ positiv semi-definit ist. Am einfachsten benutzt man das Kriterium, dass eine Matrix A genau dann positiv semi-definit ist, wenn alle Minoren nicht-negativ sind, d.h. wenn $2a \geq 0$ und $\det \nabla^2 f(x, y) = 4ab - 16 \geq 0$ ist, d.h. wenn $a, b > 0$ und $ab \geq 4$ ist.

(b) Ist $(1, 1)^\top$ lokales Minimum, so muss $\nabla f(1, 1) = (0, 0)^\top$ sein, d.h. $2a - 6 = 0$ und $2b = 0$, d.h. $a = 3$ und $b = 0$. Für diese Parameter ist f nicht konvex (Teil (a)). Der Punkt $(1, 1)^\top$ ist keine lokale Minimalstelle für diese Parameter, denn es ist $f(x, y) = 3x^2 - 4xy - 2x + 4y$, also z.B. $f(x, x) = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1 < 1 = f(1, 1)$ für alle $x \neq 1$.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Da B positiv definit ist, so gilt für alle zulässigen x , dass $1 \geq x^\top Bx \geq \lambda_{\min} \|x\|^2$, d.h. die Menge M der zulässigen Punkte ist beschränkt. (Hier ist $\lambda_{\min} > 0$ der kleinste Eigenwert von B .) Da M auch abgeschlossen und die Zielfunktion stetig ist, so existiert eine Minimalstelle.

(b) Aus der Rangabschätzung

$$m = \text{rang } A + \text{rang } B^{-1} - n \leq \text{rang}(AB^{-1}) \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B^{-1}\} = m$$

folgt $\text{rang}(AB^{-1}) = m$. Eine weitere Abschätzung liefert

$$m = \text{rang}(AB^{-1}) + \text{rang } A^\top - m \leq \text{rang}(AB^{-1}A^\top) \leq \min\{\text{rang}(AB^{-1}), \text{rang } A^\top\} = m,$$

also $\text{rang}(AB^{-1}A^\top) = m$.

Eine andere Argumentation ist die folgende: A ist nach Voraussetzung surjektiv, also A^\top injektiv. Aus $AB^{-1}A^\top x = 0$ folgt $0 = x^\top AB^{-1}A^\top x = (A^\top x)^\top B^{-1}(A^\top x)$, also $A^\top x = 0$ wegen der positiven Definitheit von B^{-1} , also auch $x = 0$. Daher ist $AB^{-1}A^\top$ injektiv, also bijektiv.

(c) Die Slaterbedingung ist erfüllt: (i) $\text{rang } A = m$ und (ii) es gibt \hat{x} mit $A\hat{x} = 0$ und $\hat{x}^\top B\hat{x} < 1$ (wähle $\hat{x} = 0$). Anwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel liefert die Existenz von $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $v \in \mathbb{R}^m$ mit

$$c + 2\lambda Bx^* + A^\top v = 0.$$

Es ist $\lambda \neq 0$, da sonst c im Wertebereich von A^\top liegen würde. Daher ist auch $x^* \neq 0$ (sonst $(x^*)^\top Bx^* < 1$ und daher $\lambda = 0$). Auflösen nach x^* liefert

$$x^* = -\frac{1}{2\lambda} B^{-1}(c + A^\top v).$$

Eingesetzt in $Ax^* = 0$ liefert $0 = AB^{-1}(c + A^\top v) = AB^{-1}c + AB^{-1}A^\top v$, also $v = -(AB^{-1}A^\top)^{-1}AB^{-1}c$. Eingesetzt in die Form von x^* liefert gerade die Behauptung mit $\alpha = \frac{1}{2\lambda}$.

(d) Wegen $\lambda \neq 0$ ist $(x^*)^\top Bx^* = 1$, also $\alpha^2(Pc - B^{-1}c)^\top B(Pc - B^{-1}c) = 1$, was eine Gleichung für α ergibt.

Lösung zu Aufgabe 5

(a) M ist abgeschlossen: Sei (x^k) eine Folge in M mit $x^k \rightarrow x$. Dann ist $1 = x_1^k x_2^k x_3^k \rightarrow x_1 x_2 x_3$ für $k \rightarrow \infty$. Also ist $x_1 x_2 x_3 = 1$, und da auch $x_j \geq 0$ ist für $j = 1, 2, 3$, so müssen auch $x_j > 0$ sein für $j = 1, 2, 3$.

M ist nicht beschränkt, denn $x_t = (t, 1/t, 1)^\top \in M$ für $t > 0$, und dies ist nicht beschränkt für $t \rightarrow \infty$.

(b) Maximalstellen existieren nicht, denn mit den x_t von Teil (a) folgt $f(x_t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Bei der Minimierung können wir uns auf $M_0 := \{x \in M : f(x) \leq f(1, 1, 1)\} = \{x \in M : f(x) \leq 7\}$ beschränken. Die Menge M_0 ist abgeschlossen und auch beschränkt, denn aus $f(x) \leq 7$ und $x_j > 0$ folgt insbesondere, dass $x_j \leq 7$ ist für $j = 1, 2, 3$. Daher existieren Minimalstellen.

(c) Wir wenden die Lagrangesche Multiplikatorenregel an. Die Constraint Qualification ist erfüllt, denn $\nabla g(x^*) = 0$ (mit $g(x) = x_1 x_2 x_3 - 1$) impliziert $x^* = 0$, was nicht geht wegen der Nebenbedingung. Also existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2^* x_3^* \\ x_1^* x_3^* \\ x_1^* x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit x_1^* , die zweite mit x_2^* und die dritte mit x_3^* . Mit $x_1^* x_2^* x_3^* = 1$ ergibt sich

$$x_1^* + \lambda = 0, \quad 2x_2^* + \lambda = 0, \quad 4x_3^* + \lambda = 0,$$

also $x^* = -\lambda(1, 1/2, 1/4)^\top$. Die Nebenbedingung liefert $1 = x_1^* x_2^* x_3^* = -\lambda^3/8$, also $\lambda = -2$. Damit ist $x^* = (2, 1, 1/2)^\top$ und $f(x^*) = 6$.