

Hettlich  
Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.  
Bemerkungen:

**Aufgabe 1:** Es sei  $M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^6 : Ax = b\}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Gibt es eine Ecke zu  $M$  mit  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  ?
- (b) Gibt es eine Ecke zu  $M$  mit  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$  ?
- (c) Gibt es freie Richtungen zu  $M$ , d.h.  $u \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$  mit  $x + tu \in M$  für alle  $x \in M$  und  $t \geq 0$  ?

**Aufgabe 2:** Lösen Sie mit Hilfe des Simplex-Verfahrens das lineare Optimierungsproblem

$$\text{Min}_{x \in M} -x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

auf

$$M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 : 2x_1 + x_3 \leq 2, 3x_2 + 2x_3 \leq 6, -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2\}.$$

**Aufgabe 3:** Zu einer konvexen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + v^\top(y - x) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^n\}$$

das Subdifferential von  $f$  in  $x$  gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\partial f(x)$  konvex und kompakt ist.
- (b) Beweisen Sie, dass  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$  gilt, wenn die Funktion  $f$  in  $x$  differenzierbar ist.  
Hinweis: Betrachten Sie  $y = x + th$  und zeigen Sie, wenn  $f$  in  $x$  differenzierbar ist und  $v \in \partial f(x)$  gilt, die Abschätzung  $v^\top h \leq (\nabla f(x))^\top h$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 4:** Gegeben ist

$$(P) \quad \text{Min}_{x \in M} f(x) = (x_1 - 4)^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

auf  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + |x_2| \leq 1\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass es sich um ein konvexes Optimierungsproblem handelt.
- (b) Begründen Sie, dass (P) genau eine Lösung besitzt.
- (c) Beweisen Sie die Existenz einer Lösung  $\hat{u}$  zum zugehörigen dualen Problem (D), und bestimmen Sie einen Karush-Kuhn-Tucker Punkt  $(\hat{x}, \hat{u}) \in M \times N$ .

**Aufgabe 5:** Berechnen Sie alle Stellen  $\hat{x} \in M$  mit minimalem Abstand zum Punkt  $(0, 3/2) \in \mathbb{R}^2$ , wobei die Menge  $M$  gegeben ist durch  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : (1 - x_2)x_1^2 = x_2^3\}$ .

**Aufgabe 1:** a) Wir betrachten mit Gauß Elimination das LGS

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Damit sind diese Spalten zwar linear unabhängig, aber die eindeutige Lösung  $(x_4, x_5, x_6)^\top = (3, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3})^\top$  hat einen negativen Eintrag. Also ist dies keine Ecke von  $M$ .

(b) Analog zu Teil (a) betrachten wir

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 18 & 20 \end{array} \right).$$

Die ersten drei Spalten aus  $A$  sind linear unabhängig. Mit der positiven Lösung  $(x_1, x_2, x_3)^\top = (\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{10}{9})^\top$  und  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$  ist eine Ecke von  $M$  gegeben.

(c) Damit  $u \in \mathbb{R}^6$  eine freie Richtung ist, muss  $u \neq 0$  nur nicht-negative Elemente besitzen und Lösung des homogenen Gleichungssystems  $Au = 0$  sein. Wir berechnen

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} -1 & -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 5/2 & 3/2 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

und erhalten die Lösungen

$$u = \begin{pmatrix} -9u_2 + 2u_3 + 3u_5 \\ u_2 \\ u_3 \\ -\frac{5}{2}u_2 - \frac{3}{2}u_3 - \frac{3}{2}u_5 \\ u_5 \\ \frac{7}{2}u_2 - \frac{3}{2}u_3 - \frac{3}{2}u_5 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir  $u_4$ , so ergibt sich, dass die einzige nicht-negative Lösung des homogenen Gleichungssystems durch  $u_2, u_3, u_5 = 0$  und somit  $u_4 = u_1 = u_6 = 0$  gegeben ist. Also gibt es keine freie Richtung zur Menge  $M$ .

Alternativ lässt sich auch mit dem Satz von Gordan (s. Aufgabe 15) argumentieren, da mit  $y = (0, -t, 0)$  für  $t > 0$  Vektoren mit  $A^\top y < 0$  gegeben sind und somit keine nicht-negative Lösung zum homogenen System  $Au = 0$  existiert.

**Aufgabe 2:** Da nach Einführen von Schlupfvariablen für die Ungleichungsbedingungen noch keine Basislösung ablesbar ist, starten wir zunächst mit Phase 1 des Simplex-Verfahrens und stellen zu  $\text{Min } e^\top(b - Ax)$  auf  $M_H = \{x \in \mathbb{R}^6 : Ax \leq b\}$  das entsprechende Tableau auf:

$$\begin{array}{cccccc|ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \\ \hline 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma - 10 \end{array}$$

mit der Basislösung  $z = (0, 0, 0, 0, 0, 2, 6, 2)^\top$ . Mit der Bland'schen Regel wählen wir das markierte Pivotelement und berechnen im ersten Schritt

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
 -2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\
 \hline
 -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \eta + 2 \\
 \hline
 -4 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & \gamma - 6
 \end{array}$$

Zwei weitere Gauß-Jordan-Umformungen liefern

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 4/3 \\
 \hline
 0 & 0 & 9/2 & 3/2 & 0 & -1 & 3/2 & 0 & 1 & \eta + 5 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 2 & \gamma - 2
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 4/3 \\
 \hline
 0 & 0 & 9/2 & 3/2 & 0 & -1 & 3/2 & 0 & 1 & \eta + 5 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma - 0
 \end{array}$$

Also ist mit  $\tilde{z} = (1, 4/3, 0, 0, 2, 0)^\top$  eine Basislösung zum Optimierungsproblem gegeben. Wir erhalten für die Phase 2 das Tableau

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \boxed{1} & 2 \\
 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 & -1/3 & 4/3 \\
 \hline
 0 & 0 & 9/2 & 3/2 & 0 & -1 & \eta + 5
 \end{array}$$

Mit dem Pivotelement ergibt sich

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\
 \hline
 0 & 0 & 9/2 & 1/2 & 0 & 0 & \eta + 7
 \end{array}$$

Aus dem letzten Tableau lesen wir die Lösung des Optimierungsproblems  $z = (1, 2, 0)^\top$  mit Zielfunktionswert  $-z_1 - z_2 - z_3 = -7$  ab.

**Aufgabe 3:** (a) Sind  $u, v \in \partial f(x)$  und  $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$  mit  $\lambda \in (0, 1)$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 & f(x) + w^\top(y - x) \\
 &= \lambda(f(x) + u^\top(y - x)) + (1 - \lambda)(f(x) + v^\top(y - x)) \\
 &\leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(y) = f(y)
 \end{aligned}$$

für jeden Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$ . Also ist  $w \in \partial f(x)$  ein Subgradient, d.h. das Subdifferential  $\partial f(x)$  ist konvex.

Da  $f(x) + v^\top(y - x)$  stetig bzgl.  $v$  ist, ist die Menge  $\partial f(x)$  abgeschlossen. Außerdem gilt für jedes  $v \in \partial f(x)$  mit  $y = x + v/\|v\|$  für  $v \neq 0$  die Abschätzung

$$\|v\| = v^\top(y - x) \leq f(x + v/\|v\|) - f(x) \leq \max_{\|d\|=1} (|f(x + d)|) + |f(x)| = C,$$

da  $f$  stetig ist (s. Satz 3.10 der Vorlesung), und die Sphäre  $\{x + d \in \mathbb{R}^n : \|d\| = 1\}$  kompakt ist. Also ist  $\partial f(x)$  beschränkt und somit kompakt.

(b) Ist  $f$  differenzierbar und konvex, dann gilt (s. Satz 3.11)  $f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x))^\top(y - x)$ , d.h.  $\nabla f(x) \in \partial f(x)$ .

Weiterhin ergibt sich mit  $v \in \partial f(x)$  und  $y = x + th$  die Abschätzung

$$v^\top h = \frac{v^\top(x + th - x)}{t} \leq \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \rightarrow (\nabla f(x))^\top h$$

für  $t \rightarrow 0$  und  $h \in \mathbb{R}^n$ . Dies zeigt die angegebene Abschätzung.

Um nun  $v = \nabla f(x)$  zu zeigen, betrachten wir  $y = x \pm h$  für beliebiges  $h \in \mathbb{R}^n$ . Aus der Ungleichung ergibt sich

$$v^\top h \leq (\nabla f(x))^\top h \quad \text{und} \quad -v^\top h \leq -(\nabla f(x))^\top h,$$

bzw.  $(v - \nabla f(x))^\top h = 0$ . Mit  $h = v - \nabla f(x)$  folgt  $\|v - \nabla f(x)\|^2 = 0$ . Also ist  $v = \nabla f(x)$ .

**Aufgabe 4:** (a) Wir beschreiben die Nebenbedingung durch  $h(x) = x_1 + |x_2| - 1 \leq 0$ . Mit der Dreiecksungleichung ist  $h$  konvex; denn aus  $\lambda \in (0, 1)$  und  $x, y \in \mathbb{R}^2$  folgt

$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 + |\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2| - 1 \\ &\leq \lambda(x_1 + |x_2| - 1) + (1 - \lambda)(y_1 + |y_2| - 1) = \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y). \end{aligned}$$

Für die Zielfunktion berechnen wir

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 4) \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla^2(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Hesse-Matrix positiv definit und somit  $f$  konvex.

(b) Da die Zielfunktion des konvexen Problems ist wegen  $z^\top \nabla^2 f(x) z \geq \frac{1}{2} \|z\|^2$  gleichmäßig konvex. Außerdem ist die Restriktionsmenge  $M$  abgeschlossen, da  $h$  stetig ist, und mit  $(0, 0)^\top \in M$  nicht-leer. Der allgemeine Existenzsatz bei gleichmäßig konvexer, stetiger Zielfunktion (s. Satz 3.15 der Vorlesung) liefert die Existenz eines eindeutig bestimmten Minimums.

(c) Mit  $(0, 0)^\top \in M$  und  $h(0, 0) = -1 < 0$  ist die Slater-Bedingung für  $M$  erfüllt. Also ist der starke Dualitätssatz gültig. Mit Teil (b) liefert dieser, dass zur Lösung  $\hat{x}$  von (P) eine Lösung  $\hat{u} \in N = \{u \in \mathbb{R}_{\geq 0} : F(u) > -\infty\} = \mathbb{R}_{geq0}$  des dualen Problems mit

$$f(\hat{x}) = F(\hat{u})$$

existiert. Dabei ist die Zielfunktion des dualen Problems gegeben durch

$$F(u) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left( (x_1 - 4)^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + u(x_1 + |x_2| - 1) \right)$$

Es gilt für die Zielfunktion wegen  $\hat{x}_1 \leq 1$  für  $\hat{x} \in M$  stets

$$f(\hat{x}) \geq (-\hat{x}_1 - 4)^2 \geq 9.$$

Weiter erhalten wir im Fall  $\hat{u} = 0$  mit  $x_1 = 4$  und  $x_2 = 0$ , dass  $F(\hat{u}) = 0$  ist. Also kann es wegen  $f(\hat{x}) \geq 9$  in diesem Fall keinen KKT Punkt geben.

Für die gesuchten Stellen gilt somit  $\hat{u} > 0$  und wegen der Komplementaritätsbedingung  $\hat{x}_1 + |\hat{x}_2| - 1 = 0$ . Außerdem ist dann

$$F(\hat{u}) = \inf_{x_1 \in \mathbb{R}} (x_1 - 4)^2 + \hat{u}(x_1 - 1)$$

(setze  $x_2 = 0$  in  $F(u)$ !). Mit der Ableitung  $2(x_1 - 4) + \hat{u} = 0$  berechnen wir das Infimum bei  $x_1 = 4 - \frac{\hat{u}}{2}$ . Einsetzen liefert  $F(\hat{u}) = -\frac{1}{4}\hat{u}^2 + 3\hat{u}$ .

Aus der quadratischen Gleichung  $-\frac{1}{4}\hat{u}^2 + 3\hat{u} = 9$  erhalten wir die Lösung  $\hat{u} = 6$ . Insgesamt sehen wir, dass mit  $\hat{x} = (1, 0)^\top \in M$  und  $\hat{u} = 6 \in N$  die Dualitätslücke geschlossen ist, d.h. wir haben einen KKT-Punkt gefunden.

**Aufgabe 5:** Wir wählen die differenzierbare Zielfunktion

$$f(x) = x_1^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2.$$

und definieren die Lagrangefunktion

$$L(x) = x_1^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda((1 - x_2)x_1^2 - x_2^3).$$

Mit dem Gradienten von  $L$  erhalten wir die Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2\lambda x_1(1 - x_2) &= 0 \\ 2\left(x_2 - \frac{3}{2}\right) - \lambda x_1^2 - 3\lambda x_2^2 &= 0 \\ (1 - x_2)x_1^2 - x_2^3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergeben sich die beiden Fälle  $x_1 = 0$  oder  $\lambda = \frac{1}{x_2 - 1}$ . Im ersten Fall folgt aber mit der dritten Gleichung  $x_2 = 0$ , was im Widerspruch zur zweiten Gleichung steht.

Also setzen wir  $\lambda = \frac{1}{x_2 - 1}$  und  $x_1^2 = x_2^3 / (1 - x_2)$  in die zweite Gleichung ein. Dies führt auf

$$0 = 2\left(x_2 - \frac{3}{2}\right)(1 - x_2)^2 + x_2^3 + 3x_2^2(1 - x_2) = -4x_2^2 + 8x_2 - 3.$$

Mit quadratischer Ergänzung berechnen wir die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung zu

$$x_2 = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Da wegen der dritten Gleichung  $x_2 \leq 1$  gelten muss, bleiben  $x_2 = \frac{1}{2}$  mit  $x_1 = \pm \sqrt{\frac{x_2^3}{1 - x_2}} = \pm \frac{1}{2}$  als Kandidaten für eine Lösung des Optimierungsproblems.

Mit  $g(x) = (1 - x_2)x_1^2 - x_2^3$  und dem Gradienten  $\nabla g(x) = (2(1 - x_2)x_1, -x_1^2 - 3x_2^2)^\top$  ist die MFB für zulässige Stellen  $x \in \mathbb{R}^2$  erfüllt, wenn  $\nabla g(x) \neq 0$  gilt. Also gilt die Bedingung für alle zulässigen  $x$  mit Ausnahme von  $x = (0, 0)^\top$ .

Mit den Funktionswerten  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \leq f(0, 0) = \frac{9}{4}$ , erhalten wir aus der notwendigen Bedingung der Lagrange'schen Multiplikatorenregel die beiden Lösungen  $x = (\pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .