WS 21/22 04.04.2022

Wieners
Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 24,5 P.
Bemerkungen: -

Aufgabe 1 (Ein lineares Programm) **2+2.5+3+2.5=10 Punkte**

Betrachten Sie zu $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $b \in \mathbb{R}^K$ und $c \in \mathbb{R}^N$ das lineare Programm in Standardform

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} := \left\{x \in \mathbb{R}^N : Ax = b,\, x \geq 0\right\}.$$

a) Formulieren Sie das duale Problem (D) zu (P).

b) Formulieren Sie zu $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^K$ das Lemma von Farkas.

Gegeben sei nun das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}) \quad & \text{Minimiere} \quad x_1 + x_3 \quad \text{unter}\\ & x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1\\ & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \quad x_1 + x_2 - x_3 = 2.\end{aligned}$$

c) Bringen Sie das Optimierungsproblem $(\widetilde{P})$ in Standardform.
Geben Sie A, b und c explizit an.

d) Zeigen Sie, dass das duale Problem zu $(\widetilde{P})$ zulässig ist.

Aufgabe 2 (Kurzaufgaben) **2+2+4=8 Punkte**

a) Formulieren Sie den Projektionssatz für konvexe Mengen.

b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{K} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad \mathcal{V} = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

c) Formulieren Sie das Nash-Gleichgewicht bei einem zwei Personen Matrixspiel. Definieren Sie die Strategiemengen für Spieler P_1 und Spieler P_2, sowie die erwartete mittlere Auszahlung für eine Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$. Wann ist das Matrixspiel fair?

Aufgabe 3 (Polarkegel) **2+1+1+2+1+2=9 Punkte**

Ein Polarkegel zu einer Menge $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$\mathcal{M}^\circ := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : y^\top x \leq 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{M} \right\}.$$

a) Skizzieren Sie den Polarkegel zur Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$ mit

$$2 \geq x_2, \quad 2 \geq x_1 - x_2, \quad x_2 \geq 0, \quad 2x_1 \geq x_2$$

und die Menge selbst.

b) Zeigen Sie, dass $(-\mathcal{M})^\circ = -(\mathcal{M})^\circ$.

c) Sei $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_2^\circ \subset \mathcal{M}_1^\circ$.

d) Zeigen Sie, dass der Polarkegel eine konvexe Menge ist.

e) Sei $\mathcal{C}$ ein Kegel. Zeigen Sie, dass für die konvexe Projektion $P_{\mathcal{C}}(x) = 0$ gilt, genau dann wenn $x \in \mathcal{C}^\circ$.

f) Sei $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass der zugehörige Polarkegel zu $\mathcal{V}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{V}^\circ = \mathcal{V}^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : v^\top x = 0 \text{ für alle } v \in \mathcal{V} \right\}.$$

Aufgabe 4 (Das Simplex-Verfahren) **2+6=8 Punkte**

Gegeben sei das lineare Programm:

$$
\begin{array}{llllll}
(P) & \text{Minimiere} & x_1 - 4x_2 - 2x_3 & \text{unter} & x \geq 0 & \text{und} \\
 & & \begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & \leq 2 \\ x_1 & +x_2 & & \leq 4 \\ & x_2 & +x_3 & \leq 8 \end{array} & & &
\end{array}
$$

a) Forumlieren Sie die Pivot-Regel nach Bland.

b) Lösen Sie das lineare Programm mit dem Simplex-Verfahren.

Aufgabe 5 (Ein konvexes Optimierungsproblem) **2+3+2+3=10 Punkte**

Zu einer konvexen Menge $\emptyset \neq \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ und einer konvexen Funktion $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sei die Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{unter} \quad x \in \mathcal{M}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge von (P)

$$\mathcal{M}^* := \{x \in \mathcal{M} \colon f(x) \leq f(y), \quad \forall y \in \mathcal{M}\}$$

konvex ist.

b) Sei $\emptyset \neq \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ nun ein Polytop. Zeigen Sie, dass f sein Maximum annimmt auf

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{M} \colon x \text{ ist Ecke von } \mathcal{M}\}\,.$$

Hinweis: Sie können verwenden, dass für $y^k \in \mathcal{M}$, $k = 1, \ldots, K$

$$f\left(\sum_{k=1}^{K} \lambda_k y^k\right) \leq \sum_{k=1}^{K} \lambda_k f(y^k), \quad \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$$

Zu $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$ konvex, sowie $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ und $b \in \mathbb{R}^K$ ist die Menge $\mathcal{M}$ nun

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon g(x) \leq 0, Ax = b\right\}.$$

c) Formulieren Sie die Slater-Bedingungen zu konvexen Optimierungsproblemen.

d) Formulieren Sie das duale Problem (D) zum kovexen Optimierungsproblem (P) auf $\mathcal{M}$ und den starken Dualitätsatz.

Aufgabe 6 (Ein differenzierbares Optimierungsproblem) **4+1+3+2=10 Punkte**

Gegeben sei das Optimierungsproblem in $\mathbb{R}^2$

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) = -\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \quad \text{unter} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

a) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte des Problems (P).

b) Skizzieren Sie die zulässige Menge und alle gefundenen KKT-Punkte aus a).

c) Zeigen Sie, dass die KKT-Punkte der (CQ2) Bedingung genügen.

d) Zeigen Sie, dass die KKT-Punkte der notwendigen Bedingung 2. Ordnung genügen.

Aufgabe 1 (Ein lineares Programm) **2+2.5+3+2.5=10 Punkte**

Lösung:

a) Das duale Problem ist gegeben durch

$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad b^\top y \quad \text{auf} \quad \mathcal{M}^* := \left\{ y \in \mathbb{R}^K : A^\top y \le c \right\}. \quad (+2)$$

b) **Lemma von Farkas:** Seien $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ und $b \in \mathbb{R}^K$. Dann gilt entweder

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^N : Ax = b,\, x \ge 0 \right\} \neq \emptyset \quad \text{oder} \quad \left\{ y \in \mathbb{R}^K : A^\top y \le 0,\, b^\top y > 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Bepunktung: Je Alternative $(+1)$, Entweder Oder $+(0.5)$.

c) Um das Problem auf Standardform zu bringen, muss zunächst x_3 durch zwei positive Variablen ersetzt werden. Setze hierfür $x_3 := u_1 - u_2$, wobei $u_1, u_2 \ge 0$ $(+0.5)$. Weiter ist noch die Ungleichungen $x_1 \ge 1$ gegeben die mit Hilfe von einer positiven Schlupfvariablen $s \ge 0$ in eine Gleichheitsbedingungen umgeformt wird $(+0.5)$.

Mit $x = (x_1, x_2, u_1, u_2, s)$ ergibt sich

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad (1,0,1,-1,0)^\top x \quad \text{auf} \quad \mathcal{M} := \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : Ax = b,\, x \ge 0 \right\}, \quad (+0.5)$$

wobei

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ s \end{pmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=b}. \quad (+1.5)$$

d) Weg über das duale Problem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A^\top} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{=y} \le \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=c} \quad (+1)$$

Aus Zeile drei $y_1 - y_2 - y_3 \le 1$ und Zeile vier $-y_1 + y_2 + y_3 \le -1$ folgt direkt, dass

$$y_1 - y_2 - y_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 - y_2 = 1 + y_3 \quad (+0.5)$$

und zusammen mit Zeile zwei $y_1 - y_2 + y_3 \le 0$ folgt dann:

$$1 + y_3 + y_3 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_3 \le -\tfrac{1}{2} \quad (+0.5)$$

Betrachte nun Zeile eins $y_1 + y_2 + y_3 \le 1 + y_4$ und Zeile fünf $y_4 \le 0$. Dann ist mit der Wahl von $y_3 = -\frac{1}{2}$, $y_4 = 0$ die Ungleichung $y_1 + y_2 \le \frac{3}{2}$ zu erfüllen. Dies ist zum Beispiel möglich mit $y_1 = 1$ und $y_2 = \frac{1}{2}$. Es existiert also ein zulässiger Punkt (hier ist dieser Punkt sogar die Lösung des linearen Programms) und damit ist auch das Problem zulässig $(+0.5)$.

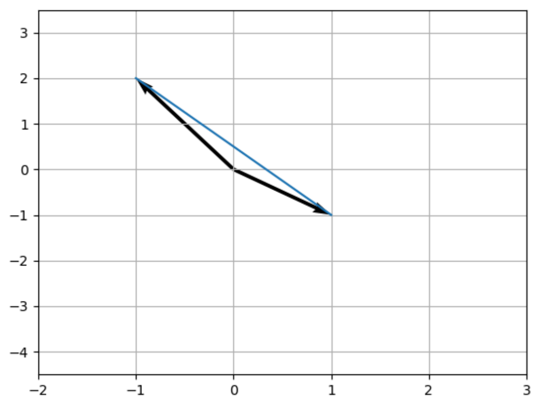
Aufgabe 2 (Kurzaufgaben) **2+2+4=8 Punkte**

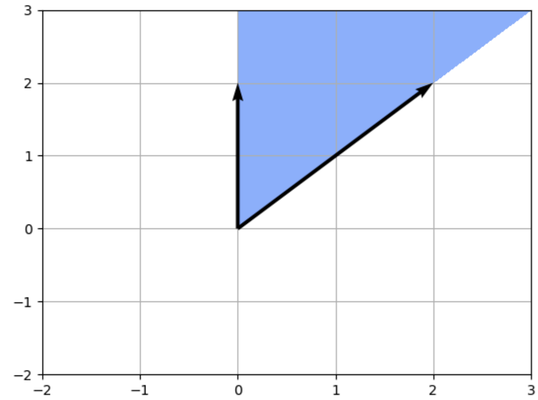
Lösung:

a) **Projektionssatz:** Sei $\emptyset \neq \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene und konvexe Menge. Zu $x \in \mathbb{R}^N$ existiert ein $x^* \in \mathcal{M}$, so dass

$$|x - x^*| \leq |x - z| \quad \forall z \in \mathcal{M}$$
$$(x - x^*)^\top (z - x^*) \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{M}$$

b) Links: $\mathcal{K} = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Rechts: $\mathcal{V} = \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$





Bepunktung: Je Skizze $(+1)$

c) **Matrixspiel:**

- Matrixspiel von P_1 und P_2: Beschrieben durch Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$
- Auszahlung von a_{kn}: P_1 spielt Strategie n und P_2 spielt Strategie k.
- Strategiemengen: Mit $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$ bzw. $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^K$

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : e^\top x = 1,\, x \geq 0 \right\}, \quad \mathcal{M}_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^K : e^\top y = 1,\, y \geq 0 \right\}$$

- Erwartete mittlere Auszahlung: $\phi(x, y) = y^\top A x$, für $x \in \mathcal{M}_1$ und $y \in \mathcal{M}_2$
- Auszahlung an P_2: $\phi(x, y) > 0$, Auszahlung an P_1: $\phi(x, y) < 0$
- Beste Strategie für P_2 falls x durch P_1 gespielt: $\max\limits_{y \in \mathcal{M}_2} \phi(x, y) = \max\limits_{k=1,\dots,K} (Ax)_k$
- Beste Strategie für P_1 falls y durch P_2 gespielt: $\min\limits_{x \in \mathcal{M}_1} \phi(x, y) = \min\limits_{n=1,\dots,N} (A^\top y)_n$
- Nash-Gleichgewicht: Für $(x^*, y^*) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ist

$$\phi(x^*, y) \leq \phi(x^*, y^*) \leq \phi(x, y^*), \quad \forall x \in \mathcal{M}_1,\, \forall y \in \mathcal{M}_2.$$

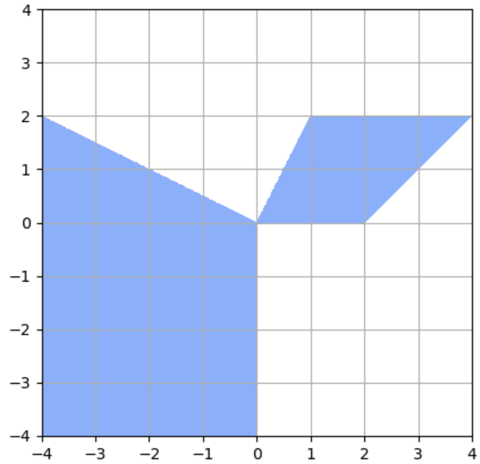
Gleichgewicht erreicht bei bester Strategie für P_1, falls P_2 optimal spielt:

$$\min_{x \in \mathcal{M}_1} \max_{y \in \mathcal{M}_2} \phi(x, y) = \phi(x^*, y^*) = \max_{y \in \mathcal{M}_2} \min_{x \in \mathcal{M}_1} \phi(x, y)$$

Aufgabe 3 (Polarkegel) **2+1+1+2+1+2=9 Punkte**

Lösung:

a) Unbesch. Menge Links: Polarkegel, Beschr. Menge Rechts: Gegebene Menge



Bepunktung: Je Menge $(+1)$

b) Es ist

$$\begin{aligned}(-\mathcal{M})^\circ &= \left\{y \in \mathbb{R}^N : y^\top x \leq 0 \text{ für alle } x \in (-\mathcal{M})\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^N : -y^\top x \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{M}\right\} \\ &= -\left\{y \in \mathbb{R}^N : y^\top x \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{M}\right\} \\ &= -\left(\mathcal{M}^\circ\right) \quad (+1)\end{aligned}$$

c) Sei $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$. Für $x_2 \in \mathcal{M}_2^\circ$ gilt, dass $y_2^\top x_2 \leq 0$ für alle $y_2 \in \mathcal{M}_2$. Also insbesondere auch, dass $y_1^\top x_2 \leq 0$ für alle $y_1 \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$. Diese x_2 sind nach Definition in der Menge $\mathcal{M}_1^\circ$ enthalten, also $\mathcal{M}_2^\circ \subset \mathcal{M}_1^\circ$.

d) Wir wollen die Konvexität des Polarkegels nachweisen. Seien also $x_1, x_2 \in \mathcal{M}^\circ$, sowie $\lambda \in [0,1]$ und $y \in \mathcal{M}$. Die Konvexkombination liegt genau dann im Polarkegel, wenn diese einen stumpfen Winkel zu $y \in \mathcal{M}$ bilden. Berechne also für $x_1, x_2 \in \mathcal{M}^\circ$

$$y^\top(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda y^\top x_1 + (1-\lambda) y^\top x_2 \leq 0.$$

e) Da $0 \in \mathcal{C}$ und wegen der Eindeutigkeit der konvexen Projektion gilt

$$x^* = P_{\mathcal{C}}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-0)^\top (y-0) \leq 0, \quad \forall y \in \mathcal{M}$$

Somit gilt für alle $y \in \mathcal{M}$, dass $x^\top y \leq 0$, also $x \in \mathcal{C}^\circ$.

f) Sei $v \in \mathcal{V}$. Da $\mathcal{V}$ ein linearer Unterraum ist, ist auch $-v \in \mathcal{V}$. Die Elemente im Polarkegel $\mathcal{V}^\circ$ müssen zu allen Elementen in $\mathcal{V}$ einen spitzen Winkel haben, also für $v \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathcal{V}^\circ$

$$v^\top x \leq 0, \quad -v^\top x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad v^\top x = 0.$$

Aufgabe 4 (Das Simplex-Verfahren) **2+6=8 Punkte**

Lösung:

a) Pivot-Regel nach Bland

(i) Pivot-Spalte $s = \min\{n\colon \hat{c}_n < 0\}$

(ii) Falls $a_{rs} \leq 0$ für alle r ist $\inf(P) = -\infty$

(iii) Pivot-Zeile b_r/a_{rs} ist minimal mit $a_{rs} > 0$

(iv) Pivot-Element ist a_{rs}

b) Simplex-Verfahren:

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

Hier ist $j = (4, 5, 6)$, $z = (0, 0, 0, 2, 4, 8)$, $\gamma = 0$.

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \quad (+2)$$

Hier ist $j = (1, 5, 6)$, $z = (2, 0, 0, 0, 2, 8)$, $\gamma = 2$.

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -7 & -5 & 4 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \quad (+2)$$

Hier ist $j = (1, 2, 6)$, $z = (2, 2, 0, 0, 0, 6)$, $\gamma = -6$.

$$\begin{array}{cccccc|c} 7 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 20 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \quad (+2)$$

Hier ist $j = (2, 3, 6)$, $z = (0, 4, 2, 0, 0, 2)$, $\gamma = -20$.

Aufgabe 5 (Ein konvexes Optimierungsproblem) **2+3+2+3=10 Punkte**

Lösung:

a) Seien $x_1, x_2 \in \mathcal{M}^*$ zwei Lösungen, das heißt $f^* = f(x_1) = f(x_2) \leq f(y)$ für alle $y \in \mathcal{M}$. Zu $\lambda \in [0,1]$ sei $x_\lambda = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$. Zu zeigen ist $x_\lambda \in \mathcal{M}^*$, also $f(x_\lambda) \leq f(y)$ für alle $y \in \mathcal{M}$. Betrachte

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &= f\left((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\right) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= (1-\lambda)f^* + \lambda f^* = f^* \leq f(y) \quad \forall y \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

und somit ist x_λ auch optimal; folglich ist $\mathcal{M}^*$ konvex.

b) Polytope sind beschränkte Polyeder. Folglich hat das Polytop $\mathcal{M}$ endlich viele Ecken $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{M} \colon x \text{ ist Ecke von } \mathcal{M}\}$. Sei $c^* = \arg\max_{c \in \mathcal{V}} f(c)$ und $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$ mit $\lambda_k \geq 0$. Für jedes $x \in \mathcal{M}$ gilt

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{V}|} \lambda_k c^k\right) \leq \sum_{k=1}^{|\mathcal{V}|} \lambda_k \underbrace{f(c^k)}_{\leq f(c^*)} \leq f(c^*),$$

also wird das globale Maximum in c^* angenommen.

c) Die Slater-Bedingungen sind gegeben durch

$$(SB1) \quad \operatorname{rang} A = K \qquad (SB2) \quad \exists \hat{x} \in \mathbb{R}^N \colon A\hat{x} = b, g(\hat{x}) < 0$$

d) Das duale Problem ist gegeben durch

$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad f^*(u,v) \quad \text{auf} \quad \mathcal{M}^* = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^K \colon u \geq 0,\ f^*(u,v) > \infty\right\}$$

wobei $f^*(u,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} L(x,u,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} f(x) + u^\top g(x) + v^\top (Ax - b)$.

Falls (P) und (D) zulässig sind und die Slater-Bedingungen erfüllt sind, folgt

(i) (P) ist lösbar $\Leftarrow$ (D) ist lösbar

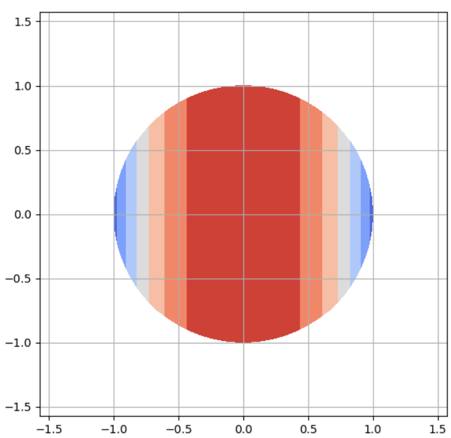
(ii) Es gelten die Komplementaritätsbedingungen: $u_p^* g_p(x^*) = 0$ für $p = 1, \ldots, P$

(iii) Es gilt $\min(P) = \max(D)$

Aufgabe 6 (Ein differenzierbares Optimierungsproblem) **4+1+3+2=10 Punkte**

Lösung:

a) Die zulässige Menge ist gegeben durch den Einheitskreis.



b) Mit $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ und ohne Gleichheitsnebenbedingung folgt für die Lagrange-Funktion:

$$L(x,u) = f(x) + u^\top g(x) = -\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) + u(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Aufstellen der KKT-Bedingungen:

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} L(x,u) &= x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) + 2ux_1, \overset{!}{=} 0\\ \partial_{x_2} L(x,u) &= 2ux_2 \overset{!}{=} 0,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 - 1 &\leq 0,\\ u &\geq 0,\\ u(x_1^2 + x_2^2 - 1) &= 0.\end{aligned}$$

$\underline{u = 0}$: Hier sind die zweite, vierte und fünfte Bedingung sofort erfüllt. Aus der ersten Bedingung ergibt sich

$$x_1 \exp(-\tfrac{x_1^2}{2}) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

und zusammen mit der dritten Bedingung folgt schließlich für $x_2 \in [-1, 1]$. Es ergibt sich also eine KKT-Punkte-Schar

$$((0, x_2), 0)\,, \quad x_2 \in [-1, 1].$$

$\underline{u > 0}$: Aus der zweiten Bedingung folgt sofort, dass $x_2 = 0$. Dann ist nach Bedingung fünf $x_1 = \pm 1$, womit Bedinung drei ebenfalls erfüllt ist. Die erste Bedingung liefert den Wert für den Wert für den Lagrange-Multiplikator

$$x_1 \left(\exp(-\tfrac{x_1^2}{2}) + 2u\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\tfrac{1}{2}\exp(-\tfrac{1}{2})$$

Dies ist ein Widerspruch, also gibt es keine weitern KKT-Punkte.

c) Die (CQ2) Bedingung ist gegeben durch

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathrm{D}\, g_{\mathcal{I}}(x^*)\\ \mathrm{D}\, h(x^*)\end{pmatrix} = |\mathcal{I}| + K, \quad \mathcal{I} = \{p \in \{1, \dots P\} : g_p(x^*) = 0\} \quad (+1)$$

Da keine Gleichheitsnebenbedingung gegeben ist reduziert sich die (CQ2) Bedingung

$$\operatorname{rang}\left(\mathrm{D}\, g_{\mathcal{I}}(x^*)\right) = |\mathcal{I}|, \quad \mathcal{I} = \{p \in \{1, \dots P\} : g_p(x^*) = 0\}\,.$$

Für alle $x_2 \in (-1, 1)$ ist die Menge der aktiven Indizes leer, das heißt die (CQ2) Bedingung muss nur für $x_2 \in \{-1, 1\}$ überprüft werden, also

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}0\\ \pm 2\end{pmatrix} = 1 = |\mathcal{I}|$$

d) Zu zeigen ist, dass

$$z^\top \mathrm{D}_x^2\, L(x^*, u^*, v^*) z \geq 0, \quad z \in \operatorname{kernel}\begin{pmatrix}\mathrm{D}\, g_I(x^*)\\ \mathrm{D}\, h(x^*)\end{pmatrix}.$$

Das heißt, die Hesse-Matrix ist positiv semi-definit auf

$$\mathcal{V} = \left\{ z \in \mathbb{R}^N \colon \, \mathrm{D}\, h(x^*) z = 0, \quad \mathrm{D}\, g_p(x^*) z = 0 \text{ für alle } p \in \mathcal{I} \right\}.$$

Berechne hierfür

$$\mathrm{D}_x^2 \, L(x,u) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)(1 - x_1^2) & 0 \\ 0 & 2u \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist für $((0,x_2),0)$ mit $x_2 \in [-1,1]$ die Matrix stets positiv semi-definit.

Notenschlüssel:

Punkte UG	Punkte OG	Note
51.5	55	1
48.5	51	1.3
45.5	48	1.7
42.5	45	2
39.5	42	2.3
36.5	39	2.7
33.5	36	3
30.5	33	3.3
27.5	30	3.7
24.5	27	4
0	24	5