# Arens

# Optimierungstheorie

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.

Bemerkungen: (Hilfsmittel, Nachklausur, etc)

**Aufgabe 1** Der Osterhase experimentiert mit seinem Rezept für magische blaue Ostereierfarbe herum, um die Ergiebigkeit zu steigern. Für das Rezept werden die drei Zutaten *Enzianblütenblätter, Blaubeersaft* und *Saphirstaub* verwendet. Durch seine Experimente findet der Osterhase heraus, dass die Anzahl der mit der Farbe bemalbaren Eier proportional zum Wert der Funktion

$$f(x) = x_1^2 \sqrt{x_2} \sqrt[3]{x_3}$$

ist, wobei $x_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, jeweils die verwendeten Mengeneinheiten an Enzianblütenblättern (Säcke), Blaubeersaft (Fässer) und Saphirstaub (Prisen) bezeichnet.

Der Osterhase hat außerdem die folgenden Zusammenhänge herausgefunden:

$$\frac{x_2}{x_1} \leq 2 \,, \qquad x_1 x_2^2 \leq \mathrm{e}^4 x_3 \,, \qquad x_3 \geq 1 \,.$$

Das Optimierungsproblem des Osterhasen ist es, den Wert von $f$ unter Beachtung dieser Zusammenhänge zu maximieren.

(a) Zeigen Sie, dass dieses Problem äquivalent zu einem linearen Optimierungsproblem ist.

(b) Formulieren Sie dieses äquivalente lineare Optimierungsproblem in Normalform.

*Hinweis: Betrachten Sie* $\log f(x)$.

**Aufgabe 2** Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplex-Verfahrens:

$$\operatorname*{Max}_{x \in M} x_1 + x_2 + x_3$$

auf

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^3_{\geq 0} : \quad x_1 + x_3 \leq 3 \,, \quad 2x_2 - 3x_3 \geq 3x_1 - 5 \,, \quad 2x_1 - x_3 \leq 2 - x_2 \right\}.$$

**Aufgabe 3** Gegeben ist das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \quad \operatorname*{Min}_{x \in M} f(x) \qquad \text{auf} \quad M = \left\{ x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1 \right\}.$$

mit $f(x) = \mathrm{e}^{x_1 + x_2^2}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich um ein konvexes Optimierungsproblem handelt.

(b) Stellen Sie das zu (P) duale Problem auf, wobei die Zielfunktion explizit zu bestimmen ist.

(c) Lösen Sie das duale Problem.

(d) Bestimmen Sie die Lösung von (P) unter Verwendung des Sattelpunktsatzes.

**Aufgabe 4** Gegeben ist die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + x)(1 + x^2) \leq y^2\}$. Gesucht sind Punkte in $M$ mit minimalem Abstand zum Ursprung.

(a) Formulieren die Problemstellung als differenzierbares Optimierungsproblem und zeigen Sie, dass es eine Lösung hat.

(b) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in M$, für die die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFB) erfüllt ist.

(c) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte für das Optimierungsproblem.

(d) Bestimmen Sie alle Punkte in $M$ mit minimalem Abstand zum Ursprung.

**Aufgabe 5**

(a) Die Mengen $K_1$, $K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ seien nichtleer, abgeschlossen und konvex. Ferner sei $K_1$ kompakt. Zeigen Sie:

(i) $K_1 - K_2 = \{z = x - y : x \in K_1\,,\ y \in K_2\}$ ist abgeschlossen.

(ii) Ist $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, so gibt es eine Hyperebene, die $K_1$ und $K_2$ strikt trennt, d.h. es gibt $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$a^\top x < \gamma < a^\top y \quad \text{für alle } x \in K_1\,,\ y \in K_2\,.$$

(b) Die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

$$K_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq \mathrm{e}^{x_1}\}\,, \qquad K_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\}$$

sind beide nichtleer, abgeschlossen und konvex. Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage: $K_1$ und $K_2$ können durch eine Gerade strikt getrennt werden.

**Aufgabe 1**

**Lösung:** (a) Wir führen $y_j = \log(x_j)$ ein und erhalten

$$\log f(x) = \log(x_1^2 \sqrt{x_2} \sqrt[3]{x_3}) = 2y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3 =: g(y)\,.$$

Durch Anwendung des Logarithmus auf die Nebenbedingungen erhalten wir

$$y_2 - y_1 \le \log(2)\,, \qquad y_1 + 2y_2 - y_3 \le 4\,, \qquad y_3 \ge 0\,.$$

Das ursprüngliche Problem lautet

$$\text{(P)} \qquad \operatorname*{Max}_{x\in M} f(x) \quad \text{auf} \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_{>0} \times \mathbb{R}_{\ge 1} : \frac{x_2}{x_1} \le 2\,,\ x_1 x_2^2 \le \mathrm{e}^4 x_3 \right\},$$

und wir betrachten das lineare Problem

$$\text{(LP)} \qquad \operatorname*{Max}_{y\in N} g(y) \quad \text{auf} \quad N = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\ge 0} : y_2 - y_1 \le \log(2)\,,\ y_1 + 2y_2 - y_3 \le 4 \right\}.$$

Zusätzlich führen wir die Funktion $\Psi(x) = (\log(x_1), \log(x_2), \log(x_3))$, $x \in M$, ein. Da die Logarithmus-Funktion streng monoton wachsend ist, folgt, dass $\Psi(M) = N$ und dass $\Psi$ bijektiv ist.

Sei nun $\hat{x} \in M$ Lösung von (P), und wir nehmen an, dass $\hat{y} \in N$ die Bedingung $g(\hat{y}) > g(\Psi(\hat{x}))$ erfüllt. Dies ist äquivalent zu $f(\Psi^{-1}(\hat{y})) > f(\hat{x})$, was der Annahme widerspricht, dass $\hat{x}$ Lösung von (P) ist. Somit ist $\Psi(\hat{x})$ Lösung von (LP). Umgekehrt folgt ganz analog, dass für eine Lösung $\hat{y} \in N$ von (LP) auch $\Psi^{-1}(\hat{y})$ Lösung von (P) ist. Damit sind die beiden Optimierungsprobleme äquivalent.

(b) Um (LP) in Normalform anzugeben, schreiben wir $y_1 = z_1 - z_2$, $y_2 = z_3 - z_4$ mit $z_j \ge 0$, $j = 1, \dots, 4$, und setzen $z_5 = y_3$. Ferner führen wir zwei Schlupfvariablen $z_6$, $z_7 \ge 0$ für die beiden Nebenbedingungen in $N$ ein. Damit erhalten wir in Normalform

$$\text{(NP)} \qquad \operatorname*{Min}_{z\in\tilde{N}} -2z_1 + 2z_2 - \frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 - \frac{1}{3}z_5$$

$$\tilde{N} = \left\{ z \in \mathbb{R}^7_{\ge 0} : \quad -z_1 + z_2 + z_3 - z_4 + z_6 = \log(2)\,, \quad z_1 - z_2 + 2z_3 - 2z_4 - z_5 + z_7 = 4 \right\}.$$

**Aufgabe 2**

**Lösung:** Zunächst formulieren wir das Problem in Normalform. Da $M \subseteq \mathbb{R}^3_{\ge 0}$ bereits erfüllt ist, müssen nur zusätzliche Schlupfvariablen $x_4$, $x_5$, $x_6 \ge 0$ eingeführt werden. Das Problem lautet dann:

$$\operatorname*{Min}_{y\in\widehat{M}} -x_1 - x_2 - x_3 \qquad \text{auf} \quad \widehat{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^6_{\ge 0} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es kann direkt die zulässige Basislösung $(0,0,0,3,5,2)^\top$ abgelesen werden, so dass wir direkt die Phase II des Simplex-Verfahrens starten können.

$$\text{(T0)} \qquad \begin{array}{rrrrrr|l} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \eta \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

$$\text{(T1)} \qquad \begin{array}{rrrrrr|c} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \eta + 1 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \uparrow & & & \uparrow & \uparrow & & \end{array}$$

$$
(T2)\quad \begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & \eta+2 \\
\hline
1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 3 \\
7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\
2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & &
\end{array}
$$

$$
(T3)\quad \begin{array}{cccccc|c}
3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & \eta+8 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
6 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 6 \\
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & &
\end{array}
$$

Damit ist die Phase II beendet, wir haben die zulässige Basislösung $\widehat{x} = (0, 5, 3, 0, 6, 0)^\top$ des Problems in Normalform gefunden. Das ursprüngliche Optimierungsproblem hat somit die Lösung $x^* = (0, 5, 3)$ mit maximalen Zielfunktionswert 8.

**Aufgabe 3**

**Lösung:** (a) Es ist $f'(x) = (1\,,\ 2x_2)\,\mathrm{e}^{x_1+x_2^2}$. Die Hesse-Matrix lautet

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2+4x_2^2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1+x_2^2}\,.$$

Da die e-Funktion stets positiv ist, reicht es aus zu zeigen, dass beide Eigenwerte der Matrix positiv sind. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\,(2+4x_2^2-\lambda) - 4x_2^2 = \lambda^2 - (3+4x_2^2)\,\lambda + 2 = \left(\lambda - \frac{3+4x_2^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3+4x_2^2}{2}\right)^2 + 2\,.$$

Da

$$\left(\frac{3+4x_2^2}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \geq 2\,,$$

gibt es zwei reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Diese lauten

$$\lambda_{1/2} = \frac{3+4x_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3+4x_2^2}{2}\right)^2 - 2},$$

und sind offensichtlich beide positiv. Somit ist die Zielfunktion konvex.

Die Restriktionsfunktion $h(x) = 1 - x_1 - x_2$ ist linear und damit auch konvex. Insgesamt handelt es sich also um ein konvexes Optimierungsproblem.

(b) Die Lagrange-Funktion zu (P) ist

$$L(x,u) = \mathrm{e}^{x_1+x_2^2} + u\,(1-x_1-x_2)\,.$$

Wir schreiben dies um zu $L(x,u) = L_1(x_1+x_2^2, u) + L_2(x_2, u)$ mit

$$L_1(y,u) = \mathrm{e}^y + u\,(1-y)\,, \qquad L_2(x_2,u) = u\,(x_2^2 - x_2)\,.$$

Elementare Überlegungen aus der Analysis einer Funktion einer Variable zeigen, dass für jedes $u \geq 0$ die Funktionen $y \mapsto L_1(y,u)$ und $x_2 \mapsto L_2(x_2,u)$ nach unten beschränkt sind. Also ist die Zielfunktion $F$ des dualen Problems für alle $u \geq 0$ definiert.

Wir bestimmen einen expliziten Ausdruck, indem wir die Minimalstellen der obigen Funktionen bestimmen. Für $u = 0$ ist das Infimum beider Funktionen null, also auch $F(0) = 0$. Für $u > 0$ ist

$$\frac{\partial L_1(y,u)}{\partial y} = \mathrm{e}^y - u \overset{!}{=} 0\,, \qquad \text{also } y = \log(u)\,,$$
$$\frac{\partial L_2(x_2,u)}{\partial x_2} = u\,(2x_2 - 1) \overset{!}{=} 0\,, \qquad \text{also } x_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Resubstitutieren wir $y = x_1 + x_2^2$, so ergibt sich $(x_1, x_2) = (\log(u) - \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. In diesem Fall ist

$$F(u) = u + u\left(1 - \log(u) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}u - u\,\log(u)\,.$$

(c) Wir suchen nach einer Stelle $u > 0$ mit $F'(u) = 0$. Es ist

$$F'(u) = \frac{3}{4} - \log(u)\,.$$

Somit ist $\hat{u} = \mathrm{e}^{3/4}$ die einzige Stelle mit $F'(\hat{u}) = 0$. An dieser Stelle ist $F(\hat{u}) = \frac{7}{4}\mathrm{e}^{3/4} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{3/4} = \mathrm{e}^{3/4} > 0$. Da $F(0) = 0$ und $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = -\infty$, handelt es sich um das globale Maxmimum von $F$.

(d) Wir haben die Lösung $\hat{u}$ des dualen Problems gefunden. Sei $\hat{x}$ Lösung des konvexen Problems. Dann gilt nach dem Sattelpunktsatz:

$$L(\hat{x}, u) \le L(\hat{x}, \hat{u}) \le L(x, \hat{u}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2\,,\ u \ge 0\,.$$

Somit ist $\hat{x}$ globale Minimalstelle der Funktion $x \mapsto L(x, \hat{u})$. Diese Minimalstelle haben wir in (b) schon in Abhängigkeit von $u$ bestimmt. Existiert also überhaupt eine Lösung $\hat{x}$ des konvexen Problems, so gilt

$$\hat{x}_1 = \log(\hat{u}) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,, \qquad \hat{x}_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Umgekehrt ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M$, und es gilt

$$L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, u\right) = \mathrm{e}^{3/4} \qquad \text{für alle } u \ge 0\,.$$

Somit erfüllt $(\hat{x}, \hat{u}) \in M \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ die Ungleichungskette aus dem Sattelpunktsatz, so dass $\hat{x}$ Lösung des konvexen Optimierungsproblems ist.

**Aufgabe 4**

**Lösung:** (a) Das Optimierungsproblem lautet

$$\text{(P)} \qquad \min_{x\in M} f(x) = x^2 + y^2 \qquad \text{auf} \quad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) \le 0\right\}$$

mit $h(x, y) = (1 + x)\,(1 + x^2) - y^2$.

Die Menge $M$ ist abgeschlossen (da $h$ stetig ist), aber nicht beschränkt. Betrachte daher $\tilde{M} = \{(x, y) \in M : |(x, y)| \le 1\}$. Die Menge $\tilde{M}$ ist beschränkt, abgeschlossen und nichtleer, denn $(-1, 0) \in \tilde{M}$. Da $f$ stetig ist, nimmt $f$ auf $\tilde{M}$ sein Minimum an. Die Minimalstellen von $f$ auf $\tilde{M}$ sind gleichzeitig Minimalstellen von $f$ auf $M$, denn $f > 1$ auf $M \setminus \tilde{M}$ und $f \le 1$ auf $\tilde{M}$. Damit sind sie auch Lösungen von (P).

(b) Gesucht sind alle $(x, y) \in M$, so dass ein $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$(1 + x)\,(1 + x^2) - y^2 + z_1\,(1 + 2x + 3x^2) - 2z_2 y < 0\,.$$

Betrachte zunächst den Fall $y \ne 0$. Wähle $z_1 = 0$ und $z_2$ so, dass $(1 + x)\,(1 + x^2) - y^2 < 2z_2 y$ ist.

Nun betrache den Fall $y = 0$. Beachte das $1 + 2x + 3x^2 = (1 + x)^2 + 2x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Somit ist die (MFB) erfüllt, falls

$$z_1 < -\frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + 2x + 3x^2}\,.$$

Insgesamt ist die (MFB) also für alle $(x, y) \in M$ erfüllt.

(c) Die Lagrange-Funktion für das Optimierungsproblem lautet

$$L(x, y, u) = x^2 + y^2 + u\,((1 + x)\,(1 + x^2) - y^2)\,.$$

Somit lauten die KKT-Bedingungen:

$$\begin{aligned} 2x + u\,(1 + 2x + 3x^2) &= 0\,,\\ 2y - 2uy &= 0\,,\\ u\,(1 + x + x^2 + x^3 - y^2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Zunächst sei $u = 0$. Die ersten beiden Gleichungen implizieren dann $(x, y) = (0, 0)$.

Ist $u \neq 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$ oder $u = 1$. Mit $y = 0$ erhalten wir sofort $x = -1$ aus der dritten und $u = 1$ aus der ersten Gleichung.

Schließlich betrachten wir noch $u = 1$. Dann ist die erste Gleichung äquivalent zu $1 + 4x + 3x^2 = 0$. Die Lösungen sind $x = -1$ und $x = -1/3$. Im ersten Fall erhalten wir aus der letzten Gleichung wieder $y = 0$, im zweiten Fall ist $y^2 = 20/27$, also $y = \pm(2/3) \cdot \sqrt{5/3}$.

Insgesamt haben wir die KKT-Punkte

$$(0,0,0)\,, \quad (-1,0,1)\,, \quad \left(-\frac{1}{3}\,, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\,, 1\right), \qquad \left(-\frac{1}{3}\,, +\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\,, 1\right)$$

gefunden.

(d) Wir betrachten die ersten beiden Koordinaten der KKT-Punkte. Der Punkt $(0, 0)$ liegt nicht in $M$. Der Punkt $(-1, 0)$ liegt in $M$ und hat den Abstand 1 vom Ursprung. Die beiden letzten Punkte liegen ebenfalls in $M$ und ihr Abstand vom Usprung ist $\sqrt{23/27} < 1$. Also sind dies die gesuchten Punkte aus $M$ mit minimalem Abstand zum Ursprung.

**Aufgabe 5**

**Lösung:** (a), (i): Betrachte eine Folge $(z_n)$ aus $K_1 - K_2$ mit $z_n \to z$ für $n \top \infty$. Zu zeigen ist $z \in K_1 - K_2$.

Schreibe $z_n = x_n - y_n$ mit $x_n \in K_1$, $y_n \in K_2$. Da $K_1$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})$ mit $x_{n_k} \to x \in K_1$ für $k \to \infty$. Da $(z_{n_k})$ und $(x_{n_k})$ konvergieren, existiert auch $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$. Da $K_2$ abgeschlossen ist, ist $y \in K_2$. Somit gilt

$$z = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} - y_{n_k}) = x - y \in K_1 - K_2\,.$$

(a), (ii): Wir zeigen zunächst, dass $K_1 - K_2$ konvex ist. Sei $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$ mit $x_1$, $x_2 \in K_1$, $y_1$, $y_2 \in K_2$. Dann gilt für alle $\alpha \in [0, 1]$:

$$\alpha z_1 + (1-\alpha)\, z_2 = \alpha\,(x_1 - y_1) + (1-\alpha)\,(x_2 - y_2) = [\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2] - [\alpha y_1 + (1-\alpha)\, y_2] \in K_1 - K_2\,,$$

da beide Mengen konvex sind. Somit ist auch $K_1 - K_2$ konvex.

Da $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, ist $0 \in \mathbb{R}^n \setminus (K_1 - K_2)$. Die Menge $K_1 - K_2$ ist abgeschlossen, konvex und nichtleer. Nach dem Trennungssatz gibt es somit ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$a^\top z \le \beta < a^\top 0 = 0 \quad \text{für alle } z \in K_1 - K_2\,.$$

Wir schreiben wieder $z = x - y$ mit $x \in K_1$, $y \in K_2$ und erhalten, da $\beta < 0$ ist,

$$a^\top x \le \beta + a^\top y < \frac{\beta}{2} + a^\top y < a^\top y \quad \text{für alle } x \in K_1\,,\ y \in K_2\,.$$

Da $K_1$ kompakt ist, existiert $\max\limits_{x\in K_1} a^\top x$, und es ist $\max\limits_{x\in K_1} a^\top x \le \inf\limits_{y\in K_2} a^\top y$. Mit $\gamma = \frac{\beta}{2} + \inf\limits_{y\in K_2} a^\top y$ folgt schließlich

$$a^\top x \le \frac{\beta}{2} + \gamma < \gamma < a^\top y \quad \text{für alle } x \in K_1\,,\ y \in K_2\,.$$

(b) Die einzigen Geraden im $\mathbb{R}^2$, die das Innere von $K_2$ nicht schneiden, sind Geraden der Form $\{x_2 = c\}$ für $c \ge 0$. Von diesen hat nur die Gerade $\{x_2 = 0\}$ einen leeren Schnitt mit dem Inneren von $K_1$. Somit ist dies auch die einzige Gerade im $\mathbb{R}^2$, die die beiden Mengen trennt. Da die Gerade aber in $K_2$ enthalten ist, trennt sie die beiden Mengen nicht strikt. Es gibt also keine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die das tut.

Dies ist kein Widerspruch zu der Aussage in (a) (ii), denn keine der beiden Mengen $K_1$, $K_2$ ist kompakt.