Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 25. April 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 1. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 1: Ein Reifenhersteller stellt zwei verschiedene Reifen aus unterschiedlichen Gummimischungen her. Für je ein Reifenset des Typs R_1 bzw. R_2 werden unterschiedliche Mengen der Rohstoffe A und B verwendet, von denen pro Monat eine gewisse Maximalkapazität zur Verfügung steht. Beim Verkauf eines Reifensets werden unterschiedliche Gewinne erzielt, die zusammen mit den anderen Daten in folgender Tabelle aufgelistet sind.

	R_1	R_2	Kapazität
Rohstoff A (Mengeneinheiten/Set)	1	2	32
Rohstoff B (Mengeneinheiten/Set)	4	2	60
Gewinn (Euro/Set)	45	30	

Da der Reifenhersteller seinen Gewinn maximieren möchte, engagiert er einen Unternehmensberater, der das (Gewinnmaximierungs-) Problem zunächst als Optimierungsproblem im $\mathbb{R}^2$ modelliert. Welches Problem tritt hierbei hinsichtlich der Lösung auf?
Hinweis: Lösen Sie das Problem grafisch.

Nach kurzer Analyse erkennt der Berater das Problem und berechnet die optimale (realisierbare) Lösung. Auf welches Ergebnis kommt er?
Hinweis: Sie können bei der Aufgabe voraussetzen, dass alle hergestellten Reifensets auch verkauft werden.

Lösung: Mit x bezeichnen wir die Anzahl der (hergestellten) Reifensets vom Typ R1, mit y die Anzahl der (hergestellten) Reifensets vom Typ R2. Das Optimierungsproblem im $\mathbb{R}^2$ lässt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} &\max_{x,y\in\mathbb{R}^2} 45x + 30y \\ &\text{unter} \quad x + 2y \leq 32 \\ &\text{und} \quad 4x + 2y \leq 60 \end{aligned}$$

Löst man dies grafisch, so sieht man, dass das Maximum im Schnittpunkt der beiden Geraden

$$g:\ x + 2y = 32 \quad \text{und} \quad h:\ 4x + 2y = 60$$

angenommen wird. (Man verschiebt die Isogewinngerade $45x + 30y = \mathit{konst}$ so weit wie möglich nach oben.) Als Schnittpunkt erhalten wir $(x, y)^\top = (\frac{28}{3}, \frac{34}{3})^\top$.
Problem: Es handelt sich um keine ganzzahlige Lösung. Die Lösung ist für den Reifenhersteller folglich nicht realisierbar.

Das Problem liegt folglich darin, eine ganzzahlige Lösung zu finden.

Anmerkung: Für Optimierungsprobleme über den ganzen Zahlen gibt es eine eigene Theorie, auf die wir an dieser Stelle allerdings nicht eingehen. Der naive Ansatz, zunächst eine Lösung $x_{\mathbb{R}}$ im $\mathbb{R}^n$ zu berechnen und anschließend die Lösung $x_{\mathbb{Z}}$ des ganzzahligen Problems in der Nähe von $x_{\mathbb{R}}$ zu suchen, führt im Allgemeinen zu falschen Ergebnissen.

Im vorliegenden Fall (beachte Bedingung für Rohstoff B) liegt x in $\{0, \dots, 15\}$. Da mit wachsendem y auch der Gewinn wächst, bestimmen wir zu jedem x das maximale y, so dass (x, y) die Bedingungen beider Rohstoffe erfüllt. Der zugehörige Gewinn ist in folgender Tabelle dargestellt:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y	16	15	15	14	14	13	13	12	12	11	10	8	6	4	2	0
G	480	495	540	555	600	615	660	675	720	735	750	735	720	705	690	675

Die für den Hersteller optimale Menge beträgt damit $(x, y)^\top = (10, 10)^\top$.

Aufgabe 2: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 y \qquad \text{und} \qquad M = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 3\}.$$

(a) Begründen Sie, dass f auf M ein globales Maximum aufweist.

Achtung: M ist unbeschränkt!

(b) Hat f auf M auch ein globales Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Ermitteln Sie alle lokalen und globalen Extremstellen und -werte von f auf M und argumentieren Sie geeignet, um ihre Existenz abzusichern.

Hinweis: Suchen Sie zunächst im Inneren von M nach Extremstellen.

Lösung:

(a) Da $x^2 \geq 0$ ist, ist die Funktion $f(x, y) = x^2 y$ für festes $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend in der Variablen y. Wir können unsere Suche nach einem globalen Maximum von f deshalb auf die Menge

$$N := M \cap \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 3,\ y \geq 0\}$$

einschränken, die den Punkt $(0, 0)^\top$ enthält und deshalb nichtleer ist. Eine globale Maximalstelle $(\hat{x}, \hat{y})$ von f auf N ist dann auch eine globale Maximalstelle von f auf M, da für $(x, y)^\top \in M \setminus N$ gilt:

$$f(x, y) = x^2 y \leq x^2 \cdot 0 = 0 = f(0, 0) \leq f(\hat{x}, \hat{y}).$$

Nun ist N aber beschränkt, da für $(x, y)^\top \in N$ gilt:

$$x^2 \leq x^2 + y \leq 3, \quad \text{also} \quad |x| \leq \sqrt{3}$$

und

$$0 \leq y \leq x^2 + y \leq 3.$$

Da N als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ferner abgeschlossen ist, ist N kompakt, und da f insbesondere auf N stetig ist, existiert nach dem Satz von Weierstraß ein globales Maximum von f auf N, das nach obiger Überlegung auch eines auf M ist.

(b) Die Funktion f hat auf M kein globales Minimum, was man wie folgt einsieht:

Die Punkte $(1, -n)^\top$ mit $n \in \mathbb{N}$ liegen alle in M, da

$$1^2 + (-n) = 1 - n \leq 1 - 1 = 0 \leq 3, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert ein $n_c \in \mathbb{N}$ mit $n_c > -c$. Also gilt

$$f(1, -n_c) = -n_c < c.$$

Folglich ist $f(M)$ nach unten unbeschränkt.

(c) Im Inneren von M, also der Menge

$$\overset{\circ}{M} = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y < 3\} \tag{1}$$

erfüllt jede Extremalstelle $(x,y)^\top$ von f die Bedingung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu: $x = 0$ oder $y = 0$, die zweite zu: $x = 0$. Da beide gelten müssen, folgt unter Berücksichtigung von (1), dass die Menge dieser kritischen Punkte durch

$$K := \{(0,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : y < 3\}$$

gegeben ist.

Die Punkte dieser Menge untersuchen wir nun darauf, ob es sich um Extremalstellen handelt. Sei dazu $(0,\hat{y})$ ein beliebiger, fest gewählter Punkt aus K.

<u>Fall: $\hat{y} < 0$:</u> Liegt $(x,y) \in M$ hinreichend nahe an $(0,\hat{y})$, so ist auch $y < 0$, und da x^2 stets nichtnegativ ist, gilt

$$f(x,y) = x^2 y \le x^2 \cdot 0 = 0 = f(0,\hat{y}),$$

womit sich $(0,\hat{y})$ als lokale Maximalstelle mit Wert 0 erweist.

Ganz entsprechend behandeln wir den

<u>Fall: $\hat{y} > 0$:</u> Liegt $(x,y) \in M$ hinreichend nahe an $(0,\hat{y})$, so ist auch $y > 0$, und da x^2 stets nichtnegativ ist, gilt

$$f(x,y) = x^2 y \ge x^2 \cdot 0 = 0 = f(0,\hat{y}),$$

womit bewiesen ist, dass $(0,\hat{y})$ in diesem Fall eine lokale Minimalstelle mit Wert 0 ist.

Es verbleibt der

<u>Fall: $\hat{y} = 0$:</u> Die Vermutung, dass in $(0,0)^\top$ ein Sattelpunkt vorliegt, untermauert man wie folgt:

Man definiere etwa die beiden Folgen $a_n := (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})^\top$ und $b_n := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^\top$ für $n \in \mathbb{N}$. Beide konvergieren für n gegen unendlich gegen $(0,0)^\top$. Jede noch so kleine Umgebung um diesen Punkt enthält also je ein (sogar unendlich viele) Folgenglied jeder Folge. Dabei ist $f(a_n) = -\frac{1}{n^3} < 0$ und $f(b_n) = \frac{1}{n^3} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(0,0)^\top$ kann also weder Maximal- noch Minimalstelle sein und ist folglich ein Sattelpunkt.

Wir setzen unsere Suche nach Extremstellen von f auf dem Rand

$$\partial M \;=\; \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 3\right\} \;=\; \left\{(x, 3-x^2)^\top : x \in \mathbb{R}\right\}$$

von M fort. Dazu führen wir die Bezeichnung

$$r(x) \;:=\; f(x, 3-x^2) \;=\; x^2(3-x^2) \;=\; -x^4 + 3x^2, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

ein. Notwendige Bedingung an eine Extremalstelle $(x, 3-x^2)^\top \in \partial M$ ist

$$0 \;=\; r'(x) = \; -4x^3 + 6x \;=\; -4x\Big(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\Big)\Big(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\Big),$$

also

$$x = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{oder} \qquad x = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Es ist

$$r(0) \;=\; 0, \qquad r\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}\Big) \;=\; \frac{9}{4} \;=\; r\Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}\Big).$$

Da laut Teil (a) eine globale Maximalstelle von f auf M existiert und f an allen kritischen Punkten, die im Inneren von M dafür infrage kämen, den Funktionswert 0 hat, muss es sich bei den Punkten $(\sqrt{3/2},\, 3/2)^\top$ und $(-\sqrt{3/2},\, 3/2)^\top$ um globale und damit insbesondere auch lokale Maximalstellen handeln.

Der Punkt $(0,3)^\top$ erweist sich schließlich mit demselben Argument wie im Fall: $\hat{y} > 0$ der Untersuchung der kritischen Punkte in $\overset{\circ}{M}$ als lokale Minimalstelle.

Aufgabe 3: Eine Messung liefert zu $N \in \mathbb{N}$ verschiedenen Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ die jeweiligen Messwerte $y_1, y_2, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\|\Delta\|^2 = (F(t_1) - y_1)^2 + (F(t_2) - y_2)^2 + \ldots + (F(t_N) - y_N)^2,$$

minimal wird. Es seien ferner $M \in \mathbb{N}$ Ansatzfunktionen $f_1, f_2, \ldots f_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Für $\alpha \in \mathbb{R}^M$ sei

$$g(\alpha) = (F(t_1) - y_1)^2 + (F(t_2) - y_2)^2 + \ldots + (F(t_N) - y_N)^2$$

mit spezieller Funktion $F(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \ldots \alpha_M f_M(t)$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von g. Zeigen Sie, dass die kritischen Punkte α_* mit $\nabla g(\alpha_*) = 0$ Lösung eines linearen Gleichungssystems sind.

(b) Nun seien $M = 2$, $N \geqslant 2$, $f_1(t) = 1$ und $f_2(t) = t$. Zeigen Sie, dass es nun genau einen kritischen Punkt α_* mit $\nabla g(\alpha_*) = 0$ gibt und dass g in α_* global minimiert wird.

Hinweis: Für Aufgabenteil (a) ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ mit $A_{ij} = f_j(t_i)$, $i = 1, \ldots N$, $j = 1, \ldots, M$ hilfreich.

Lösung: (a) Zunächst setzen wir die Funktion F in g ein und erhalten

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j f_j(t_i) - y_i \Big)^2.$$

Wir leiten partiell nach α_k, $k = 1, \ldots, M$ ab und erhalten mit der Kettenregel

$$\frac{\partial g}{\alpha_k}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} 2 \Big(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j f_j(t_i) - y_i \Big) f_k(t_i), \quad k = 1, \ldots, M.$$

Ist nun $\nabla g(\alpha) = 0$, so muss jede Komponente des Gradienten verschwinden, also $\frac{\partial g}{\partial \alpha_k}(\alpha) = 0$ für alle $k = 1, \ldots, M$. Es ist

$$0 = \frac{\partial g}{\partial \alpha_k}(\alpha) \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j f_j(t_i) - y_i \Big) f_k(t_i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} f_k(t_i) y_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f_k(t_i) f_j(t_i) \alpha_j.$$

Setzen wir $y := (y_1, \ldots, y_N)^\top \in \mathbb{R}^N$, so steht auf der linken Seite der letzten Gleichung die k-te Komponente des Matrix-Vektor-Produktes $A^\top y$. Auf der rechten Seite steht analog die k-te Komponente von $A^\top A \alpha$. Also sind die Nullstellen durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A^\top A \alpha = A^\top y$$

gegeben.

(b) Nun ist konkret

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 2}.$$

Damit ist

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & \sum_{i=1}^N t_i^2 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det(A^\top A) = N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N t_i^2 = \frac{1}{N}\Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)^2.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir

$$\sum_{i=1}^N t_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot t_i < \Big(\sum_{i=1}^N 1^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^N t_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

wobei die strikte Ungleichung aus der linearen Unabhängigkeit von $(1, 1, \ldots, 1)^\top$ und $(t_1, t_2, \ldots, t_N)^\top$ folgt. Damit ist

$$\det(A^\top A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N t_i^2 = \frac{1}{N}\Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)^2 < \sum_{i=1}^N t_i^2.$$

Also ist $A^\top A$ stets invertierbar und es gibt genau einen kritischen Punkt α_* mit $\nabla g(\alpha_*) = 0$. Wir müssen nun noch überprüfen, ob es sich dabei um ein Minimum oder Maximum handelt. Dazu berechnen wir die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l}(\alpha) = 2 \sum_{i=1}^N f_k(t_i) f_l(t_i).$$

Die konstante Hesse-Matrix H_g ist damit wie folgt gegeben:

$$H_g(\alpha) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N 1 & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & \sum_{i=1}^N t_i^2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau zwei mal $A^\top A$. Der Eintrag $(H_g(\alpha))_{11}$ ist postiv. Ferner ist auch

$$\det H_g(\alpha) = 4 \det(A^\top A) = 4\Big[N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)^2\Big] > 4\Big[N \sum_{i=1}^N t_i^2 - N \sum_{i=1}^N t_i^2\Big] = 0$$

positiv und damit $H_g(\alpha)$ positiv definit. Also besitzt g genau eine lokale Minimalstelle α_*. Da die Hesse-Matrix H_g für alle α positiv definit ist, folgt, dass g konvex ist. Also ist die lokale Minimalstelle tatsächlich eine globale Minimalstelle.

Löst man explizit nach α_* auf, erhält man die Ausgleichsgerade $F(t) = \alpha_{*,1} + \alpha_{*,2}\, t, \;\; t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_{*,1} &= \frac{\Big(\sum_{i=1}^N t_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^N y_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^N t_i y_i\Big)}{N\Big(\sum_{i=1}^N t_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)^2}, \\ \alpha_{*,2} &= \frac{N\Big(\sum_{i=1}^N t_i y_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^N y_i\Big)}{N\Big(\sum_{i=1}^N t_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^N t_i\Big)^2}. \end{aligned}$$