Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 9. Mai 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 2. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 4:

(a) Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem: „Maximiere $5x_1 + x_2 - 2x_3$ unter den Nebenbedingungen $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$."

Formulieren Sie das Problem in der Form:

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{unter} \quad Ax \leq b\,.$$

(b) Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem: „Minimiere $x_1 - 2x_2 + 3x_3$ unter den Nebenbedingungen $x_1 - x_2 \leq 1,\ 3x_2 - 4x_3 \leq 5$."

Formulieren Sie das Problem in der Form:

$$(P_N) \qquad \text{Minimiere} \quad c^\top y \quad \text{unter} \quad y \geq 0\,,\ Ay = b\,.$$

Lösung:

(a) Wir schreiben die Nebenbedingungen zunächst um:

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &\leq -6 \end{aligned}$$

und erhalten mit $c = (-5, -1, 2)^\top$ und $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ die gewünschte Form:

$$(P) \qquad \operatorname*{Min}_{x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}} (-5, -1, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{unter} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir setzen $x_1 = u_1 - v_1$, $x_2 = u_2 - v_2$ und $x_3 = u_3 - v_3$ mit $u_i \geq 0$ und $v_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3$. Durch Einführen der Schlupfvariablen $y_1 \geq 0$ und $y_2 \geq 0$ können wir die Nebenbedingungen schreiben als

$$\begin{aligned} u_1 - v_1 - (u_2 - v_2) + y_1 &= 1\,, \\ 3(u_2 - v_2) - 4(u_3 - v_3) + y_2 &= 5\,. \end{aligned}$$

Setzt man $y = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, y_1, y_2)^\top$, so lassen sich die Nebenbedingungen kurz schreiben als

$$\begin{aligned} &(1, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 0)\, y = 1 \\ \text{und} \quad &(0, 0, 3, -3, -4, 4, 0, 1)\, y = 5\,. \end{aligned}$$

Die Zielfunktion wird zu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= u_1 - v_1 - 2(u_2 - v_2) + 3(u_3 - v_3) \\ &= (1, -1, -2, 2, 3, -3, 0, 0)\, y\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Form

(P_N) $\quad \underset{y \in \mathbb{R}^8}{\text{Min}}\ (1, -1, -2, 2, 3, -3, 0, 0)\, y$

unter $y \geq 0$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 5: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Weiter seien

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^\top & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(n+1)} \quad \text{und} \quad \widehat{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Wir betrachten ferner die Mengen

$$\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \\ \widehat{M} &= \{\widehat{x} = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} : \widehat{A}\widehat{x} = \widehat{b}, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: z ist eine Ecke der Menge M genau dann, wenn $\widehat{z} = (z, -c^\top z)^\top$ eine Ecke der Menge $\widehat{M}$ ist.

Hinweis: Betrachten sie unter der Annahme, z ist eine Ecke zu M, eine Darstellung von $\widehat{z}$ als Konvexkombination in $\widehat{M}$ und umgekehrt.

Lösung: „$\Longrightarrow$“: Ist z eine Ecke von M, dann liegt der Vektor

$$\widehat{z} = \begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix} \in \widehat{M},$$

da

$$\widehat{A}\widehat{z} = \begin{pmatrix} Az \\ c^\top z - c^\top z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist und aus $z \in M$ folgt, $z \geq 0$. Sei nun

$$\widehat{z} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in (0, 1)$ und $\begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \widehat{M}$. Mit

$$\widehat{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \widehat{A} \begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

gilt $y_1 = -c^\top z_1$, $y_2 = -c^\top z_2$ und $Az_1 = b = Az_2$. Außerdem sind $z_1, z_2 \geq 0$, also $z_1, z_2 \in M$.

Aus der Darstellung von $\widehat{z}$ folgt $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$. Da z eine Ecke von M ist, gilt somit $z_1 = z = z_2$ und wir haben

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ -c^\top z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_2 \\ -c^\top z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist $\begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix}$ eine Ecke von $\widehat{M}$.

„$\Longleftarrow$ “: Es sei $\begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix}$ eine Ecke von $\widehat{M}$ und wir betrachten mit $\lambda \in (0,1)$ eine Konvexkombination

$$z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$$

mit $z_1, z_2 \in M$. Da $Az_1 = b = Az_2$ und $z_1, z_2 \geq 0$ ist, sind

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ -c^\top z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ -c^\top z_2 \end{pmatrix} \in \widehat{M}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ -c^\top \lambda z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda) z_2 \\ -c^\top (1-\lambda) z_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ -c^\top z_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} z_2 \\ -c^\top z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix}$ eine Ecke von $\widehat{M}$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ -c^\top z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -c^\top z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -c^\top z \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind $z_1 = z_2 = z$ und mit $z = z_1 \in M$ ist gezeigt, dass z eine Ecke von M ist.

Aufgabe 6: Beweisen Sie, dass ein nichtleeres Polyeder $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ genau dann keine Ecken besitzt, wenn es $x \in M$ und $r \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gibt mit $x + tr \in M$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass eine Gerade $\{x + tr : t \in \mathbb{R}\}$ genau dann in M liegt, wenn $x \in M$ und $Ar = 0$ gilt.

Lösung: Sei $x \in M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ und $r \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Wir zeigen zunächst, dass genau dann

$$x + tr \in M \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

ist, wenn $Ar = 0$ gilt.

Die eine Richtung ist offensichtlich, denn aus $x \in M$ und $Ar = 0$ für ein $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ folgt

$$A(x + tr) = Ax + tAr = Ax \leq b,$$

d. h. $x + tr \in M$ für $t \in \mathbb{R}$.

Die andere Implikation beweisen wir, indem wir annehmen, dass $x + tr \in M$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist dann $x \in M$, und wir erhalten aus $A(x + tr) \leq b$ die Ungleichung

$$t(Ar)_i \leq (b - Ax)_i$$

für $i = 1, \ldots, m$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. Da die linke Seite für $(Ar)_i \neq 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt wäre, muss $Ar = 0$ gelten.

Mit dieser Beobachtung kommen wir zurück zur Aufgabe.

“$\Rightarrow$” Wir gehen davon aus, dass es eine Gerade

$$x + tr \in M \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gibt. Nach obiger Überlegung gilt somit $Ar = 0$. Ist nun $\widehat{x} \in M$ beliebig, so folgt für $t \in \mathbb{R}$

$$A(\widehat{x} + tr) = A\widehat{x} + tAr = A\widehat{x} \leq b.$$

Also sind insbesondere auch $\widehat{x} \pm r \in M$, und es gilt die Konvexkombination

$$\widehat{x} = \frac{1}{2}(\widehat{x} + r) + \frac{1}{2}(\widehat{x} - r).$$

Somit ist $\widehat{x}$ keine Ecke.

"$\Leftarrow$" Für die zweite Implikation gehen wir davon aus, dass es keine Gerade in M gibt, und beweisen die Existenz einer Ecke.

Aus der Annahme, dass es keine Gerade in M gibt, folgt wieder mit unserer ersten Überlegung zusammen mit $M \neq \emptyset$, dass das lineare Gleichungssystem

$$Ar = 0$$

keine Lösung $r \neq 0$ hat. Damit lässt sich aus den m Zeilen a_{i*}, $i = 1, \ldots, m$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine n–elementige linear unabhängige Auswahl treffen.

Wir definieren weiter zu jedem $x \in M$ die Anzahl der linear unabhängigen *aktiven* Zeilen. Das heißt, mit

$$I(x) := \{i \in \{1, \ldots, m\} : (Ax)_i = b_i\}$$

und

$$U(x) := \operatorname{span}\{a_{i*} : i \in I(x)\}$$

betrachten wir $\dim U(x) \leq n$. Aus den Elementen von M wählen wir ein $\widehat{x} \in M$ aus mit der Eigenschaft

$$\dim U(\widehat{x}) = \max_{x \in M} \dim U(x)$$

und unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall, $\dim U(\widehat{x}) = n$: Dann gilt $(A\widehat{x})_i = b_i$ für alle i aus einer n–elementigen Indexmenge $J \subseteq I(\widehat{x})$ linear unabhängiger Zeilen von A. Für jede Konvexkombination

$$\widehat{x} = \lambda y^1 + (1 - \lambda) y^2$$

mit $\lambda \in (0, 1)$ und $y^1, y^2 \in M$ folgt nun

$$b_i = (A\widehat{x})_i = \lambda \underbrace{(Ay^1)_i}_{\leq b_i} + (1 - \lambda) \underbrace{(Ay^2)_i}_{\leq b_i}$$

für $i \in J$. Also ist $(Ay^1)_i = b_i$, $(Ay^2)_i = b_i$ und

$$(A(y^1 - y^2))_i = 0.$$

Diese Identität gilt für alle n linear unabhängigen Zeilen mit Index $i \in J$, womit wir $y^1 = y^2 = \widehat{x}$ erhalten. Das heißt, $\widehat{x}$ ist Ecke des Polyeders.

2. Fall, $\dim U(\widehat{x}) < n$: Hier ist $U(\widehat{x})^\perp \neq \{0\}$. Nach wie vor gilt

$$\begin{aligned} (A\widehat{x})_i &= b_i, \qquad i \in I(\widehat{x}), \\ (A\widehat{x})_i &< b_i, \qquad i \notin I(\widehat{x}). \end{aligned} \tag{1}$$

Wähle nun $v \in U(\hat{x})^\perp \backslash \{0\}$. Aus (1) und der Tatsache, dass v senkrecht auf den Zeilen von A mit Index $i \in I(\widehat{x})$ steht, folgt für hinreichend kleine Werte $\varepsilon > 0$:

$$A\widehat{x} \pm \varepsilon A v \leq b\,, \tag{2}$$

das heißt, $\widehat{x} \pm \varepsilon v \in M$.

Es ist $\dim U(\widehat{x}) < n = \operatorname{Rang} A$ und $v \in U(\hat{x})^\perp \backslash \{0\}$. Somit gibt es mindestens ein $j \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\widehat{x})$ mit $(A\widehat{x})_j < b_j$ und $(Av)_j \neq 0$. Für ein bestimmtes j dieser Art und das Maximum $\widehat{\varepsilon}$ aller $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft (2) ist $(A\widehat{x})_j + \widehat{\varepsilon}(Av)_j = b_j$ oder $(A\widehat{x})_j - \widehat{\varepsilon}(Av)_j = b_j$, was wegen $v \neq 0$ im Widerspruch dazu steht, dass $\widehat{x}$ die maximale Anzahl aktiver Indizes aufweist.

Also tritt der erste Fall ein, und es gibt mindestens eine Ecke zum Polyeder M.