Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 16. Mai 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 3. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 7: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\},$$

$$(P') \qquad \text{Minimiere} \quad \rho \quad \text{unter} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ y \end{pmatrix} \in M' := \Lambda \cap \big(\mathbb{R} \times \{0_m\}\big),$$

wobei $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} c^\top x \\ Ax - b \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Des Weiteren sei $\rho^* := \inf(P)$.

Beweisen Sie:

(i) $M \neq \emptyset \iff M' \neq \emptyset$

(ii) Es existiert eine Lösung x^* von (P) $\iff$ $\begin{pmatrix} \rho^* \\ 0_m \end{pmatrix}$ ist Lösung von (P').

Lösung: Beweis:

(a) „$\Rightarrow$“: Sei $M \neq \emptyset$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $x \geq 0_n$. Setze $\rho = c^\top x$ und $y = Ax - b$. Daraus folgt, dass $(\rho, y)^\top \in M'$.
„$\Leftarrow$“: Sei $M' \neq \emptyset$. Dann existiert mindestens ein $(\rho, y)^\top \in M' = \Lambda \cap \big(\mathbb{R} \times \{0_m\}\big)$. Also existiert ein $x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0_n$ mit $\rho = c^\top x$ und $y = Ax - b = 0$. Daraus folgt, dass $x \in M$.

(b) „$\Rightarrow$“: Das Problem (P) sei lösbar mit Lösung x^*. Das heißt, $\inf(P) > -\infty$, und $c^\top x^* = \inf(P) = \rho^*$, sowie $Ax^* = b$ und $x^* \geq 0$. Also ist $(\rho^*, 0_m)^\top = (c^\top x^*, Ax^* - b)^\top \in M'$. Angenommen $(\rho^*, 0_m)^\top$ wäre keine Lösung von (P'). Dann gäbe es ein $(\rho', 0_m)^\top \in M'$, also ein $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax' = b$, $x' \geq 0$ und $\rho' = c^\top x'$, sodass $c^\top x' = \rho' < \rho^* = c^\top x^*$ gelten würde. Da x' aber in M läge, wäre das ein Widerspruch zur Optimalität von x^*.

„$\Leftarrow$“: Sei $(\rho^*, 0_m)$ optimal unter allen $(\rho, 0)^\top \in M'$. Dann gibt es ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax^* = b$, $x^* \geq 0$, sodass $c^\top x^* = \rho^* \leq c^\top x$ für alle $x \geq 0$ mit $Ax = b$, also für alle $x \in M$. Daraus folgt die Optimalität von x^* für (P).

Aufgabe 8: Ein landwirtschaftlicher Betrieb möchte Weizen und Kartoffeln anbauen. Bezogen auf einen Hektar Anbaufläche entsteht bei Kartoffeln ein Aufwand an Arbeitszeit von 2 Stunden und ein Reingewinn nach der Ernte von 20 Euro. Dem entsprechend beträgt bei Weizen der Aufwand 12 Stunden und der Reingewinn 80 Euro. Da Weizen empfindlicher auf gewisse Witterungseinflüsse reagiert, soll höchstens auf einem Drittel der letztendlich genutzten Fläche Weizen angebaut werden. Der Betrieb möchte seinen Gewinn maximieren und daher die optimalen Anbauflächen k für Kartoffeln und w für Weizen bestimmen. Insgesamt stehen ihm 1500 Hektar Anbaufläche und 4500 Arbeitsstunden zur Verfügung.

Formulieren Sie das Problem als Optimierungsaufgabe und lösen Sie diese mithilfe des Simplexverfahrens.

Lösung: Gibt k die mit Kartoffeln bepflanzte Fläche in Hektar an und w die mit Weizen bepflanzte, so ist folgende Gewinnfunktion zu maximieren:

$$g(k,w) = 20k + 80w.$$

Als Nebenbedingungen erhalten wir $k + w \leq 1500$ (maximale Gesamtfläche), $2k + 12w \leq 4500$ (maximale Arbeitsstunden), $w \leq \frac{1}{3}(k+w)$ oder $-k + 2w \leq 0$ (maximal ein Drittel der Anbaufläche soll mit Weizen bepflanzt sein) und die offensichtlichen Bedingungen $k, w \geq 0$.
Damit erhalten wir die Maximierungsaufgabe:

$$\text{Maximiere } g(k,w) = 20k + 80w$$
$$\text{auf } M = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ k \geq 0,\ w \geq 0,\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ w \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1500 \\ 0 \\ 4500 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir führen Schlupfvariablen $a, b, c \geq 0$ ein und können damit die Nebenbedingungen umformulieren zu $k + w + a = 1500$, $-k + 2w + b = 0$ und $2k + 12w + c = 4500$. Damit erhalten wir das Problem in Normalform

$$\text{Minimiere } c^\top x \text{ (mit } c^\top = (-20, -80, 0, 0, 0)) \text{ unter } x \geq 0 \text{ und } Ax = b$$
$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1500 \\ 0 \\ 4500 \end{pmatrix}.$$

Schreibt man dies als Simplextableau T_1, kann man direkt mit Phase II des Simplexalgorithmus' beginnen, da hier $b \geq 0$ sowie $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ gilt.

$$T_1 : \quad \begin{array}{rrrrr|r} -20 & -80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 0 & 1 & 4500 \end{array}$$

Nach der Bland'schen Regel wählen wir nun die erste Spalte als Pivotspalte und dort a_{11} als Pivotelement wegen $\frac{b_1}{a_{11}} < \frac{b_3}{a_{31}}$. Dies führt auf

$$T_2 : \quad \begin{array}{lrrrr|r} 0 & -60 & 20 & 0 & 0 & 30000 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1500 \\ 0 & 10 & -2 & 0 & 1 & 1500 \end{array}.$$

Jetzt kommt nur die zweite Spalte in Betracht und dort offensichtlich das Element a_{32} als Pivotelement. Wir erhalten

$$T_3 : \quad \begin{array}{llrlr|r} 0 & 0 & 8 & 0 & 6 & 39000 \\ \hline 1 & 0 & 1{,}2 & 0 & -0{,}1 & 1350 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 1 & -0{,}3 & 1050 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 150 \end{array}.$$

Der aktuelle Kostenvektor c ist komponentenweise nichtnegativ. Daher endet der Simplexalgorithmus an dieser Stelle mit minimalem Wert -39000 und optimaler Wahl $k = 1350$ und $w = 150$. Der maximale Gewinn beträgt also 39000.

Aufgabe 9: Gegeben sei das Optimierungsproblem:

$$\text{Minimiere} \quad -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \quad \text{unter} \quad x \geq 0,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\frac{1}{4}x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0\,, \\
\frac{1}{2}x_1 & - & 12x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0\,, \\
 & & & & x_3 & & & \leq & 1\,.
\end{array}$$

Wenden Sie Phase II des Simplexverfahrens an, und verwenden Sie dabei folgende Pivotregel:

(i) Pivotspalte sei die Spalte $j = \min\{l : c_l = c^*\}$, wobei $c^* := \min\limits_{l \in \{1,\dots,n\}} c_l\,.$

(ii) Pivotzeile sei die Zeile $i = \min\{k : b_k/a_{kj} = r^*\}$, wobei $r^* := \min\big\{b_k/a_{kj} : k \in \{1,\dots,m\},\ a_{kj} > 0\big\}$.

Zeigen Sie, dass sich bei Verwendung dieser Pivotregel ein Zyklus ergibt.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein Beispiel für einen Zyklus von E.M.L. Beale (s. Skript Definition 2.18). Das 7. Tableau sollte mit dem 1. Tableau übereinstimmen.

Lösung: Schreibt man obiges System unter Zuhilfenahme von Schlupfvariablen in ein Simplextableau und benutzt die angegebene Pivotregel, so ergibt sich folgender Zyklus:

$$T_1 : \quad \begin{array}{ccccccc|c}
-\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\boxed{\frac{1}{4}} & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$$T_2 : \quad \begin{array}{ccccccc|c}
0 & -4 & -\frac{7}{2} & 33 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & -32 & -4 & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{4} & \frac{3}{2} & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$$T_3 : \quad \begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & -2 & 18 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & \boxed{8} & -84 & -12 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{15}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$$T_4 : \quad \begin{array}{ccccccc|c}
\frac{1}{4} & 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline
\frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{64} & 1 & 0 & \boxed{\frac{3}{16}} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 1 & 1
\end{array}$$

$$T_5 : \quad \begin{array}{ccccccc|c}
-\frac{1}{2} & 16 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
-\frac{5}{2} & 56 & 1 & 0 & \boxed{2} & -6 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4} & \frac{16}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\
\frac{5}{2} & -56 & 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1
\end{array}$$

$$T_6 : \quad \begin{array}{ccccccc|c}
-\frac{7}{4} & 44 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline
-\frac{5}{4} & 28 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
\frac{1}{6} & -4 & -\frac{1}{6} & 1 & 0 & \boxed{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$$T_7 = T_1: \quad \begin{array}{rrrrrrr|r} -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wie man sieht, haben wir einen Zyklus erzeugt.