Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 23. Mai 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 4. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 10: Es seien $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Lösen Sie mithilfe des Simplexverfahrens das folgende Problem:

$$\text{Maximiere } f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$\text{unter } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 - x_2 \leq 10.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie zu Anfang die Fälle $\beta > 0$ und $\beta \leq 0$.

Lösung: Es sei $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 - x_2 \leq 10\right\}$.

Fall $\beta > 0$: Da der Strahl $s = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = 0,\ x_2 = t \text{ mit } t \geq 0\right\}$ im Polyeder M liegt, ist f im Falle $\beta > 0$ auf M unbeschränkt, d.h. $\sup\{f(x) : \ x \in M\} = \infty$.

Fall $\beta \leq 0$: Wir führen die Schlupfvariable $x_3 \geq 0$ mit $x_1 - x_2 + x_3 = 10$ ein und überführen das Problem in Normalform, d.h. „Minimiere $c^\top x$ (mit $c = (-\alpha, -\beta, 0)^\top$) unter $x \geq 0$ und $Ax = b$“, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = 10.$$

Schreibt man dies als Simplex-Tableau T_1, so kann man gleich mit Phase II des Simplexalgorithmus beginnen, da $b \geq 0$ und $c_3 = 0$ gilt:

$$T_1 : \quad \begin{array}{ccc|c} -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \hline \boxed{1} & -1 & 1 & 10 \end{array}$$

Da $-\beta \geq 0$ nach Voraussetzung gilt, kommt es im weiteren auf das Vorzeichen von α an. Ist $-\alpha \geq 0$, also $\alpha \leq 0$, so besitzt die Minimierungsaufgabe das Minimum 0, d.h. $\max\{f(x) : \ x \in M\} = f(0,0) = 0$.

Im Fall $-\alpha < 0$, d.h. $\alpha > 0$, kann man weitermachen:

$$T_2 : \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & (-\beta - \alpha) & \alpha & 10\alpha \\ \hline 1 & -1 & 1 & 10 \end{array}$$

Gilt nun $-\beta - \alpha \geq 0$, also $\alpha + \beta \leq 0$, so haben wir wiederum das Minimum erreicht, und es gilt $\max\{f(x) : \ x \in M\} = 10\alpha$.

Gilt aber $-\beta - \alpha < 0$, dann muss das Pivotelement aus der zweiten Spalte kommen. Da aber die entsprechende Spalte negativ ist, nämlich -1, ist die Minimierungsaufgabe unbeschränkt, es gilt also in diesem Fall $\sup\{f(x) : \ x \in M\} = \infty$.

Aufgabe 11: Bestimmen Sie mithilfe des Simplex-Algorithmus' alle $\alpha \geq 0$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \geq 0$ besitzt.

Lösung: Wir setzen $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Dann ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

äquivalent zu $Ax = b$. (Multiplikation der ersten Zeile mit -1, damit die rechte Seite nichtnegativ ist).
Um Lösungen von $Ax = b$ mit $x \geq 0$ zu bestimmen, betrachten wir das Hilfsproblem

$$(P_I) \qquad \text{Minimiere } e^\top(b - Ax) \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax \leq b,\ x \geq 0.$$

(Dabei ist $e = (1,1)^\top$). Wir erhalten dann (vgl. Simplexalgorithmus, Phase I) das folgende Simplextableau

$$T_1: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & -(2+\alpha) \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & \alpha \end{array}$$

Wir führen nun Phase II des Simplexalgorithmus für das Hilfsproblem (P_I) durch. Aus dem Simplextableau ist ersichtlich, dass das Pivotelement in der dritten Spalte zu suchen ist. Folglich kommt es darauf an, ob $\frac{2}{2} \leq \frac{\alpha}{1}$ oder $\frac{2}{2} > \frac{\alpha}{1}$, also ob $\alpha \in [1, \infty)$ oder $\alpha \in [0, 1)$.
Fall 1 $\alpha \in [1, \infty)$**:** Als Pivotelement nehmen wir das Element a_{13}.

$$T_1: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & -(2+\alpha) \\ \hline -2 & 1 & \boxed{2} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & \alpha \end{array}$$

$$T_2: \quad \begin{array}{rrrrr|r} -1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1-\alpha \\ \hline -1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \boxed{1} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \alpha - 1 \end{array}$$

$$T_3: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \alpha - 1 \end{array}$$

Der aktuelle Kostenvektor ist nichtnegativ. Das Verfahren stoppt also an dieser Stelle, und da der Zielfunktionswert 0 ist, erhalten wir, dass das System lösbar ist mit Lösung $x = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Fall 2 $\alpha \in [0, 1)$**:** Als Pivotelement nehmen wir das Element a_{23}.

$$T_1: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & -2-\alpha \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 & 1 & \alpha \end{array}$$

$$T_2: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 2 & -5 & 0 & 0 & 3 & -2+2\alpha \\ \hline -2 & \boxed{5} & 0 & 1 & -2 & 2-2\alpha \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & \alpha \end{array}$$

$$T_3: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\alpha \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha \end{array}$$

Auch hier ist der aktuelle Kostenvektor ohne negative Komponente und das Verfahren endet wieder. Da der Zielfunktionswert gleich 0 ist, ist das System wiederum lösbar mit Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\alpha \\ \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12: Bestimmen Sie mithilfe des Simplexalgorithmus' eine Lösung des folgenden Optimierungsproblems:

(P) Minimiere $x_1 - x_2$
unter den Nebenbedingungen $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 + 2x_2 \geq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir zerlegen x_2 in Positiv- und Negativteil, also $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ mit $x_2^+ \geq 0$ und $x_2^- \geq 0$. Damit erhalten wir als äquivalentes Problem die Aufgabe

$$\begin{array}{c} \text{Minimiere } x_1 - x_2^+ + x_2^- \\ \text{unter den Nebenbedingungen } x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 3,\ x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \geq 1,\ x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0. \end{array}$$

Mithilfe der Schlupfvariablen $x_4 \geq 0$ und $x_5 \geq 0$ erhalten wir damit das Simplextableau

$$T_1: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Dieses Tableau ist für die Phase II des Simplexalgorithmus nicht geeignet, da noch ein Einheitsvektor fehlt. Wir wenden deswegen Phase I auf die letzte Zeile an und erhalten

$$T_2: \quad \begin{array}{rrrrrr|r} -1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline\hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{1} & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

und anschließend

$$T_3: \quad \begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Der Zielfunktionswert für Phase I ist damit 0 und wir können mit Phase II beginnen (dazu streichen wir die vorletzte Spalte und die erste Zeile des Tableaus).

$$T_4: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \boxed{2} & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Dies führt auf

$$T_5: \quad \begin{array}{rrrrr|r} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Es folgt der letzte Simplexschritt

$$T_6: \quad \begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Da der Kostenvektor nichtnegativ ist, endet der Simplexalgorithmus an dieser Stelle mit dem Ergebnis $\min(\mathrm{P}) = -3$ für $x_1 = 0$, $x_2^+ = 3$ und $x_2^- = 0$, also $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.